This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909238 9

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

(Lacroix

Digitized by Google

Digitized by Google

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ARITHMÉTIQUE.

Digitized by Google

Cet ouvrage se trouve aussi :

A ANGOULÊME. .	chez PEREZ-LECLER.
BORDEAUX. . .	— CHAUMAS.
BOURGES. . . .	— VERMEIL.
BREST.	— Mme Vve LEFOURNIER.
CHERBOURG. .	— LE FRANÇOIS.
LILLE.	— VANACKÈRE.
LORIENT. . . .	— LEROUX-CASSART.
LYON.	— PERISSE frères.
	— GIBERTON et BRUN.
MARSEILLE. . .	— Mme Vve CAMOIN.
METZ.	— WARION.
MONTPELLIER.	— SÉWALLE.
NANCY.	— G. GRIMBLOT et Cie.
NANTES.	— FOREST aîné.
	— GUÉRAUD.
	— PETITPAS.
ORLÉANS. . . .	— GATINEAU.
RENNES.	— VERDIER.
ROCHEFORT. .	— Mme FLEURY.
ROUEN.	— LEBRUMENT.
STRASBOURG. .	— TREUTTEL et WURTZ.
	— Mme LEVRAULT.
	— DERIVAUX.
TOULON. . . .	— MONGE et WILLAMUS.
TOULOUSE. . .	— Mlles GALLON sœurs.
	— BON et PRIVAT.
	— GIMET.
LONDRES. . . .	— DULAU et Cie, Soho-Square.
	— BAILLIÈRE.
MADRID	— A. POUPART et frère.
	— MONIER.
TURIN	— BOCCA.
VIENNE.	— ROHRMANN.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

Digitized by Google

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ARITHMÉTIQUE,

A L'USAGE

DE L'ÉCOLE CENTRALE DES QUATRE-NATIONS;

PAR S.-F. LACROIX.

VINGTIÈME ÉDITION,

REVUE ET AUGMENTÉE,

1°. Des Tables pour la conversion des Mesures anciennes en Mesures nouvelles, et des Mesures usuelles en Mesures nouvelles; — 2°. Des Tables de comparaison des Mesures des principales villes de France et de l'étranger avec les Mesures nouvelles; — 3°. Du Tableau de comparaison des Monnaies étrangères avec les Monnaies françaises.

ASTOR LIBRARY NEW-YORK

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1848.

Digitized by Google

Circulaire de Monsieur le MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE *à* MM. *les Recteurs.*

Paris, 17 octobre 1838.

MONSIEUR LE RECTEUR,

Les principaux Libraires de Paris qui s'occupent de la publication des Livres employés dans l'enseignement, en me faisant connaître qu'il existe de nombreuses contrefaçons de ces ouvrages, se plaignent de la facilité avec laquelle elles sont introduites dans les Colléges et dans les Écoles primaires, où leur prix semble, disent-ils, les faire préférer aux éditions originales. De là le double inconvénient de propager l'usage d'*éditions incorrectes* et de décourager les Éditeurs légitimes qui, trompés dans leurs prévisions, sont souvent forcés de renoncer, au détriment de la science, à améliorer et même à publier des ouvrages qu'ils craignent de ne pouvoir exploiter sans dommages et sans troubles.

Vous voudrez bien, en conséquence, monsieur le Recteur, inviter les chefs d'établissements d'instruction secondaire et d'instruction primaire à prendre des précautions pour qu'*aucune édition contrefaite* ne soit à l'avenir admise dans les Colléges et dans les Écoles. Vous appellerez leur attention sur les inconvénients qui résultent, pour les études, de l'*incorrection de ces éditions*. Il y a d'ailleurs, dans le fait de la contrefaçon, une action coupable que la loi et la morale réprouvent également, et dont aucun membre de l'Université ne voudra, j'en suis assuré, se rendre complice. Je vous invite à rappeler à MM. les chefs d'établissements de tous les degrés qu'ils ne doivent employer que des Livres régulièrement approuvés ou autorisés par l'Université, et à leur faire remarquer que comme l'indication du nom de l'Éditeur accompagne toujours le titre des ouvrages dans les notifications des décisions dont ces ouvrages ont été l'objet, toute erreur est facile à éviter. L'intérêt des études leur prescrit d'y veiller.

Le Ministre de l'Instruction publique, grand maître de l'Université,

Signé SALVANDY.

Par acte authentique entre Monsieur et Madame Lacroix, M. Bachelier est aujourd'hui *seul* propriétaire des *OEuvres* de S.-F. LACROIX.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe du Libraire-Propriétaire, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Bachelier

Digitized by Google

AVIS DU LIBRAIRE.

Ce Traité est le premier volume du Cours élémentaire de Mathématiques pures *de S.-F. Lacroix, Cours qui comprend l'*Arithmétique, *l'*Algèbre, *la* Géométrie, *la* Trigonométrie rectiligne et sphérique, *ainsi que l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie. *On trouvera dans les* Essais sur l'Enseignement, *du même Auteur, l'analyse de chacune de ces parties, auxquelles font suite le* Complément des Éléments d'Algèbre, *le* Complément des Éléments de Géométrie (*ou* Éléments de Géométrie descriptive), *le* Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, *et le* Traité élémentaire du Calcul des Probabilités.

Observation. Tout numéro placé entre deux parenthèses indique l'article sur lequel s'appuie celui où il est cité; et il faut relire le premier si l'on ne se rappelle pas le rapport qu'il peut avoir avec ce que contient le second.

Digitized by Google

TABLEAU COMPARATIF

DES CHIFFRES ARABES, ROMAINS ET FRANÇAIS.

La valeur des chiffres arabes indique celle des chiffres romains et français correspondants.

Les lettres numérales romaines et françaises sont au nombre de sept.

ARABES.	ROMAINS.	FRANÇAIS.	ARABES.	ROMAINS.	FRANÇAIS.
1	I	i ou j	80	LXXX *	lxxx
2	II	ij	90	XC *	lxxxx
3	III	iij	95	XCV	lxxxxb
4	IV	ib	100	C	jc
5	V	b	200	CC	ijc
6	VI	bj	300	CCC	iijc
7	VII	bij	400	CCCC	iiijc
8	VIII	biij	500	D	bc
9	IX	ix	600	DC	bjc
10	X	x	900	CM	ixc
11	XI	xj	1000	M	c
20	XX	xx	2000	IIM	ijc
30	XXX	xxx	10000	X^{m}	xc
40	XL	xl	100000	C^{m}	jcc
50	L	l	1500	MD	cbc
60	LX	lx	1004	MIV	cib
70	LXX*	lxx	1829	MDCCCXXIX	cbiijcxxix

* En Suisse et dans une grande partie de la France, on dit *septante, octante, nonante,* ce qui est plus régulier.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

Circulaire de Monsieur le Ministre de l'Instruction publique à MM. les Recteurs IV

Avis du Libraire. V

Tableau comparatif des chiffres arabes, romains et français. VI

Notions générales sur les diverses espèces de grandeurs ou quantités 1

De la numération parlée. 2

Moyen de représenter les nombres par des chiffres, ou de la numération écrite. 3

Manière d'énoncer un nombre. 6

Ce que c'est qu'un *nombre abstrait* ou *concret* 7

De l'Addition. 8

Principes sur lesquels repose l'addition . . . . . *Ib*.

Règle générale pour faire l'addition. 10

De la Soustraction . . . . . *Ib*.

Principes sur lesquels repose la soustraction. . . . . *Ib*.

Du sens des mots *reste*, *excès*, *différence* 11

Règle générale de la soustraction 13

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction 14

De la Multiplication 16

Origine de la multiplication. . . . . *Ib*.

Ce que signifient *multiplicande*, *multiplicateur*, *produit*, *facteurs* 17

Principes sur lesquels repose la multiplication. . . . . *Ib*.

Table de Pythagore, contenant les produits qu'il est nécessaire de connaître pour multiplier un nombre par un autre. 18

Digitized by Google

Pages.
Formation de cette Table. . . . . *Ib.*
Remarque, de laquelle on déduit qu'un produit de deux facteurs ne change pas, quel que soit l'ordre des facteurs. 19
Règle pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul 21
Comment on multiplie un nombre par 10, 100, etc. . . . 23
Règle pour multiplier par un nombre composé d'un chiffre significatif suivi de plusieurs zéros. . . . . *Ib.*
Règle générale de la multiplication. 25
Comment on abrége la multiplication quand le multiplicande et le multiplicateur sont terminés par des zéros. . *Ib.*

De la Division 26

Origine de la division. . . . . *Ib.*
Principes sur lesquels repose la division. . . . . *Ib.*
Ce que signifient *dividende, diviseur, quotient* 27
Ce qu'il faut faire lorsque le diviseur a plusieurs chiffres. . 30
Règle générale de la division 33
Moyen d'abréger le calcul. 35
Ce qu'il faut faire lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par des zéros . . . . . *Ib.*
La division et la multiplication se servent réciproquement de preuve. . . . . *Ib.*

Des Fractions 36

Origine des fractions. . . . . *Ib.*
Manière d'énoncer et d'écrire les fractions. 38
Ce que signifient *numérateur, dénominateur* . . . . . *Ib.*
Changements qu'éprouve une fraction lorsqu'on augmente ou qu'on diminue l'un de ses termes . . . . . *Ib.*
Tableau représentant les changements qu'on opère sur une fraction en multipliant ou en divisant l'un de ses termes. 40
Une fraction ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par le même nombre. 41

Digitized by Google

Pages.

Moyen de simplifier une fraction sans lui faire changer de valeur. 42
Ce que c'est que le *plus grand commun diviseur de deux nombres*. 43
Règle générale pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres. 45
Caractères auxquels on reconnaît les nombres divisibles par 2, par 5 et par 3. 46
Ce qu'on entend par *nombres premiers*. 48
De l'addition et de la soustraction des fractions. . . . . *Ib*.
Extraction des entiers d'une fraction. 49
Réduction d'un entier en fraction. 50
Réduction des fractions au même dénominateur. 51
Un produit composé de plusieurs facteurs ne change pas, dans quelque ordre qu'on multiplie ces facteurs. . . . 52
Additions et soustractions d'entiers joints à des fractions. 54
Ce que signifie, en général, le mot *multiplier* 55
Multiplication d'un nombre entier par une fraction. . . . 56
Multiplication d'une fraction par une fraction 57
Des fractions de fractions. . . . . *Ib*.
Ce que c'est que la *division en général* 58
Division d'un nombre entier par une fraction. 59
Division d'une fraction par une fraction. . . . . *Ib*.

Des Fractions décimales 60

Origine des fractions décimales.. . . . . *Ib*.
Manière d'écrire et d'énoncer les décimales 61
On ne change pas un nombre qui a des chiffres décimaux en mettant à sa suite un ou plusieurs zéros. 62
Addition des décimales. 63
Soustraction des décimales 64
Changements que l'on fait en déplaçant la virgule 65
Multiplication d'un nombre qui contient des décimales par un nombre entier. 66
Multiplication d'un nombre décimal par un nombre décimal 67
Division d'un nombre décimal par un nombre entier. . . 68

Digitized by Google

Pages.
Division d'un nombre décimal par un nombre décimal. . 69
Manière d'approcher du quotient d'une division par les décimales . . . . . *Ib.*
Note sur la manière d'évaluer le quotient d'une division en fractions d'une espèce donnée 70
Réduction des fractions ordinaires en décimales . . . . . *Ib.*
Note sur la conversion d'une fraction en une autre d'une espèce plus petite . . . . . *Ib.*
Des *fractions décimales périodiques* 71

Exposition du nouveau système métrique, et applications usuelles de l'Arithmétique 75

Nomenclature des diverses espèces de mesures. . . . . *Ib.*
Liaison des unités de ces mesures rapportées à la mesure de longueur. 76
Note sur la liaison des nouvelles mesures avec les dimensions de la terre . . . . . *Ib.*
Exemples des questions qui se présentent le plus souvent en Arithmétique 79

Des Proportions. 82

Questions qui conduisent aux proportions. 83
Ce que c'est qu'un *rapport* ou une *raison*, une *proportion*. 84
Un rapport ne change pas lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre.. 85
Manière d'indiquer qu'il y a proportion entre quatre nombres. . . . . *Ib.*
Moyen de s'assurer s'il y a proportion entre quatre nombres, et conséquence remarquable qu'on en tire. . . . 86
Permutations qu'on peut faire subir aux termes d'une proportion sans la troubler. 87
Comment on trouve l'un des quatre termes d'une proportion, lorsque les autres sont connus. 88
Ce que c'est que la *règle de trois*. 89
Attention qu'il faut avoir en mettant des nombres en proportion . . . . . *Ib.*

Digitized by Google

Pages.

Ce que c'est qu'une *raison* ou un *rapport inverse*. 90
Règle d'intérêt 91
Règle d'escompte. 92
Note sur les deux manières de prendre l'escompte. . . . *Ib*.
Règle de trois composée. . . . . *Ib*.
Ce que c'est qu'un *rapport composé*. 97

Règle de Société. . . . . *Ib*.

Diverses autres questions. 99
De l'*équidifférence*. 100
Propriété remarquable de l'équidifférence. . . . . *Ib*.
Note sur les dénominations de *proportion géométrique, proportion arithmétique* . . . . . *Ib*.

Règle d'alliage. 101

De la comparaison des diverses mesures de même genre 103

Rapports des mesures anciennes aux mesures nouvelles; méthode pour convertir les unes dans les autres. . . . 104
Manière d'évaluer les monnaies ou les mesures d'un pays par celles de plusieurs autres, ou *règle conjointe*. . . . 108

Du calcul des nombres complexes. . . . 109

Ce que c'est que les *nombres complexes* et les *nombres incomplexes* . . . . . *Ib*.

De l'Addition des nombres complexes . . *Ib*.

De la Soustraction des nombres complexes 111

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction des nombres complexes. 113

De la Multiplication des nombres complexes. 114

En les convertissant en fractions. . . . . *Ib*.
Multiplication d'un nombre complexe par un nombre incomplexe 116

Digitized by Google

Pages.

Ce que c'est que des *parties aliquotes* 117
Note sur la dénomination de *faux produit*. 118
Procédé pour le cas où le multiplicateur seul est complexe. 119
Procédé pour le cas où le multiplicande et le multiplicateur sont tous deux complexes.. 120
Règle générale 123

De la Division des nombres complexes. . . *Ib*.

Lorsque le dividende et le diviseur sont de même espèce. *Ib*.
Lorsqu'ils sont d'espèces différentes, et que le diviseur seul est complexe.. 126
Lorsque le dividende et le diviseur sont tous deux complexes. . . . . *Ib*.

De quelques moyens employés pour abréger les calculs arithmétiques 128

Procédé pour abréger la multiplication et la division des grands nombres 129
Procédé pour abréger la multiplication des nombres qui contiennent des décimales.. 131
Décomposition d'un nombre dans ses facteurs 133
Idée des *fractions continues*. 134

Sur l'application de l'Arithmétique à la banque et au commerce. 138

Caractères usités pour désigner les anciennes mesures. 140

Mesures de Paris 141

Observations relatives aux Tables de conversion des mesures anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement 142
Table pour convertir les mesures linéaires anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement. 143
Table pour convertir les mesures carrées anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement. 144

Digitized by Google

Pages.

Table pour convertir les mesures cubiques anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement 145

Table pour convertir les mesures de capacité anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement. 146

Table pour convertir les poids anciens en poids nouveaux, et réciproquement. . . . . *Ib.*

Table pour convertir les mesures linéaires usuelles en mesures nouvelles, et réciproquement. 147

Table pour convertir les mesures de capacité usuelles en mesures nouvelles, et réciproquement. . . . . *Ib.*

Table pour convertir les poids usuels en poids nouveaux. *Ib.*

Table de comparaison de quelques anciennes mesures des principales villes de France avec les mesures nouvelles. 148

Mesures des Romains. 150

— Mesures de longueur. . . . . *Ib.*
— Mesures de superficie. . . . . *Ib.*
— Mesures de capacité. . . . . *Ib.*
— Mesures de poids. . . . . *Ib.*

Monnaies des Romains. 151

Mesures des anciens Grecs. . . . . *Ib.*

— Mesures de longueur. . . . . *Ib.*
— Mesures de superficie. . . . . *Ib.*
— Mesures de capacité. . . . . *Ib.*
— Mesures de poids. 152

Monnaies d'Athènes. . . . . *Ib.*

Comparaison de quelques mesures étrangères avec les nouvelles mesures françaises . . . . . *Ib.*
— Mesures linéaires. . . . . *Ib.*
— Poids . . . . . *Ib.*

Table de concordance des calendriers républicain et grégorien. 153

Table pour convertir les livres (tournois), sous et deniers en francs, ainsi que les francs en livres. 154

Digitized by Google

Pages.

TABLEAU DE COMPARAISON DES MONNAIES ÉTRANGÈRES AVEC LES MONNAIES FRANÇAISES, TOUTES SUPPOSÉES DROITES (EXACTES) DE POIDS ET DE TITRE, D'APRÈS LES LOIS DE FABRICATION 154
— Angleterre. 155
— Autriche et Bohême . . . . . *Ib.*
— Bade. . . . . *Ib.*
— Bavière. 156
— Belgique. . . . . *Ib.*
— Danemark et Holstein. . . . . *Ib.*
— Espagne. . . . . *Ib.*
— État ecclésiastique . . . . . *Ib.*
— États-Unis d'Amérique. 157
— Hambourg. . . . . *Ib.*
— Hollande. . . . . *Ib.*
— Japon . . . . . *Ib.*
— Lombardo-Vénitien (Royaume). . . . . *Ib.*
— Mogol . . . . . *Ib.*
— Naples. 158
— Parme . . . . . *Ib.*
— Perse . . . . . *Ib.*
— Portugal. . . . . *Ib.*
— Prusse. 159
— Raguse. . . . . *Ib.*
— Russie. . . . . *Ib.*
— Sardaigne . . . . . *Ib.*
— Savoie et Piémont . . . . . *Ib.*
— Saxe. 160
— Sicile . . . . . *Ib.*
— Suède . . . . . *Ib.*
— Suisse. . . . . *Ib.*
— Toscane . . . . . *Ib.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Digitized by Google

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ARITHMÉTIQUE.

De la Numération.

1. La comparaison des divers objets qui tombent sous nos sens nous fait bientôt apercevoir, dans tous ces objets, un attribut (ou qualité) par lequel on peut les concevoir susceptibles d'augmentation et de diminution : cet attribut est la *grandeur*. Elle se montre, en général, sous deux formes différentes :

Tantôt comme une collection de plusieurs choses pareilles ou de plusieurs parties séparées ; on la désigne alors par le mot *nombre ;*

Tantôt comme un seul tout, sans distinction de parties ; c'est ainsi que l'on conçoit la distance entre deux points, ou la longueur de la ligne qui va de l'un à l'autre, les contours ou les enveloppes qui déterminent la figure et l'*étendue* des corps, enfin cette *étendue* elle-même.

Le caractère propre à cette dernière forme de la grandeur, c'est la liaison qu'on envisage dans ses parties ou leur *continuité ;* tandis que dans le nombre on considère seulement combien il contient de parties, circonstance à laquelle se rapportait d'abord le mot *quantité* qu'on a ensuite appliqué à la grandeur en général, en observant d'appeler *quantité continue* la grandeur considérée sous la forme continue, pour la distinguer du nombre, qu'on nomme *quantité discrète* ou *discontinue*.

Digitized by Google

2. Tout ce qui concerne la *grandeur* est l'objet de la science appelée *Mathématiques*; les nombres sont spécialement l'objet de l'*Arithmétique*.

La grandeur continue appartient à la *Géométrie*, qui s'occupe particulièrement des propriétés que présentent les formes des corps, par rapport à l'*étendue*.

3. Le nombre, étant la collection de plusieurs choses pareilles ou de plusieurs parties distinctes, suppose l'existence d'une de ces choses ou de ces parties, prise pour terme de comparaison, et qu'on appelle alors *unité*.

La manière la plus naturelle de former les nombres est de joindre d'abord une unité avec une autre, puis encore une autre avec la réunion des précédentes; et en continuant ainsi, on compose des collections d'unités, qu'on exprime par des noms particuliers : l'ensemble de ces noms, qui change d'une langue à une autre, compose la *numération parlée*.

4. Comme rien ne limite la grandeur à laquelle on peut porter le nombre, puisqu'il est toujours possible, quelque grand que soit un nombre, d'y joindre une unité de plus, on conçoit qu'il existe une infinité de nombres différents, et qu'il serait, par conséquent, impossible de les exprimer, dans quelque langue que ce fût, par des noms isolés ou indépendants les uns des autres.

De là sont nées les nomenclatures, dans lesquelles on a tâché de se procurer, par les combinaisons d'un petit nombre de mots assujettis à des formes régulières et par conséquent faciles à retenir, un grand nombre d'expressions distinctes.

Celles qui sont en usage dans la langue française se tirent, à quelques exceptions près, des noms assignés aux neuf premiers nombres, et de ceux que prennent ensuite les collections de *dix*, de *cent* et de *mille unités*.

En effet, les unités se comptent par

un, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit* et *neuf*.

Digitized by Google

Les collections de dix unités ou les *dizaines*, par

dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante et dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix (1).

Les collections de dix dizaines, ou les *centaines*, se comptent avec les noms affectés aux unités; on dit

cent, deux cents, trois cents,..., neuf cents.

Les collections de dix centaines, ou les *mille*, se comptent, soit avec les noms affectés aux neuf premiers nombres, soit par dizaines et centaines; ainsi l'on dit

mille, deux mille,..., neuf mille,
dix mille, vingt mille, etc.,
cent mille, deux cent mille, etc.

Les collections de dix centaines de mille, ou de mille fois mille, portent le nom de *millions*, et se comptent comme les mille.

Les collections de dix centaines de millions, ou de mille millions, se nomment *billions*, et se comptent comme les millions (2).

Chacune des collections désignées précédemment est considérée comme formant une *unité d'un ordre de plus en plus élevé*, à mesure qu'on s'éloigne des *unités simples*. On voit aussi que les noms de *dizaine* et de *centaine* se répètent toujours, et qu'il ne s'en introduit de nouveaux, tels que *mille*, *million*, *billion*, que de trois en trois

(1) Pour rendre régulière cette partie de la nomenclature, il faudrait, comme l'a proposé Condorcet, substituer les mots *unante* et *duante* aux mots *dix* et *vingt*, et remplacer, ainsi qu'on le fait encore dans plusieurs parties de la France, les dénominations composées, *soixante et dix*, *quatre-vingts* et *quatre-vingt-dix*, par les mots *septante*, *octante* et *nonante*. Il est à propos de remarquer que les premières sont le reste d'une ancienne manière de compter par vingtaines, et d'après laquelle on disait *six vingts* pour exprimer le nombre *cent vingt*.

(2) Les billions se nomment *milliards* dans les calculs de finance.

Digitized by Google

ordres seulement. Suivant cette loi, aux billions on fait succéder les *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, etc., qui ont, comme les billions, leurs dizaines et leurs centaines.

Les nombres exprimés de cette manière, lorsqu'il entre plus d'un mot dans leur énonciation, se trouvent décomposés en plusieurs des collections, ou d'ordres d'unités, désignées ci-dessus; par exemple, le nombre exprimé par *cinq cent mille trois cent deux* se trouve décomposé en trois parties, qui sont *cinq centaines de mille*, *trois centaines d'unités simples* et *deux de ces dernières unités*.

5. La longueur de l'expression *en toutes lettres* des nombres, lorsqu'ils sont un peu grands, a fait imaginer des caractères exclusivement affectés à leur représentation abrégée; et de là est venu l'art d'écrire les nombres par ces caractères appelés *chiffres*, ou la *numération écrite*.

Celle qui est adoptée aujourd'hui suit une marche à peu près analogue à la numération parlée. D'abord, les neuf premiers nombres y sont représentés chacun par un caractère particulier, savoir :

1	2	3	4	5	6	7	8	9
un,	*deux*,	*trois*,	*quatre*,	*cinq*,	*six*,	*sept*,	*huit*,	*neuf*.

Quand un nombre est composé de dizaines et d'unités, on en écrit successivement, de gauche à droite, les dizaines et les unités, par le caractère affecté à leur nombre. Le nombre *quarante-sept*, par exemple, s'écrit 47 : le premier chiffre à gauche, 4, marque les quatre dizaines, et a par conséquent une valeur dix fois plus grande que celle qu'il aurait s'il était seul; tandis que le chiffre 7, placé à droite, exprimant les sept unités, n'a que la valeur qui lui a été d'abord attachée.

On voit dans le nombre *trente-trois*, qui s'écrit 33, le chiffre 3 répété deux fois, mais avec des valeurs différentes : *le premier, vers la gauche, a une valeur dix fois plus grande que celui qui est à sa droite.*

Digitized by Google

C'est là le principe fondamental de notre numération écrite.

Si l'on voulait exprimer *cinquante*, ou cinq dizaines, comme il n'y a point d'unités dans ce nombre, on n'aurait à écrire que le chiffre 5, et il faudrait, par conséquent, indiquer par une marque particulière, que dans l'expression du nombre, ce chiffre doit occuper la première place à gauche; pour cela, on mettrait à sa droite le caractère 0, ou le *zéro*, qui n'a par lui-même aucune valeur, et qui ne sert qu'à remplir la place des collections d'unités qui manquent dans l'énonciation du nombre proposé, et l'on aurait 50.

6. C'est avec dix caractères seulement, et la convention établie ci-dessus, sur la valeur que les chiffres tirent du rang qu'ils occupent, qu'on parvient à exprimer tous les nombres possibles.

Avec deux chiffres, on peut écrire jusqu'à neuf dizaines et neuf unités, ce qui forme 99, ou *quatre-vingt-dix-neuf*. Après ce nombre vient la centaine, qui se marque par le chiffre 1, plus avancé d'un rang vers la gauche qu'il ne le serait s'il exprimait des dizaines; et pour cela, on met deux zéros à sa droite, ce qui fait 100.

Les unités et les dizaines qu'on ajoutera ensuite pour former les nombres supérieurs à 100 prendront la place qui leur est propre : ainsi *cent un* s'écrira en chiffre 101; *cent onze* s'écrira 111. On voit dans ce dernier le même chiffre répété trois fois avec des valeurs différentes. Au premier rang, en commençant par la droite, il exprime une unité, au second une dizaine, au troisième une centaine. Il en est de même dans les nombres 222, 333, 444, etc. C'est ainsi que, par suite de la convention établie précédemment à l'égard des dizaines et des unités, *un même chiffre exprime des unités de dix en dix fois plus grandes, à mesure qu'on l'avance de la droite vers la gauche, et devient, par un simple changement de*

Digitized by Google

place, susceptible de représenter successivement les diverses collections d'unités qui peuvent entrer dans l'expression d'un nombre.

7. On écrit donc un nombre sous la dictée, ou d'après son énoncé, en plaçant successivement à côté les uns des autres, en commençant par la gauche, les chiffres qui expriment les nombres d'unités de chaque collection; mais il faut avoir présent à l'esprit l'ordre dans lequel se succèdent ces collections, pour n'en omettre aucune, et remplir par des zéros la place de celles qui manquent dans l'énoncé du nombre à écrire. Si c'était, par exemple, *trois cent vingt-quatre mille neuf cent quatre*, on mettrait 3 pour les centaines de mille, 2 pour les vingt mille ou deux dizaines de mille, 4 pour les mille, 9 pour les centaines; et comme immédiatement après les centaines viennent les dizaines, qui manquent dans le nombre proposé, on mettrait 0 pour en tenir lieu, puis on poserait le chiffre 4 des unités : on aurait de cette manière 324904.

De même, avec l'attention de remplir par des zéros les places des dizaines de mille, des mille et des dizaines, qui manquent dans le nombre *cinq cent mille trois cent deux*, on écrira 500302.

8. Lorsqu'un nombre est écrit en chiffres, pour l'énoncer ou le traduire dans la langue ordinaire, il faut substituer à chacun des chiffres le mot qu'il représente, et, d'après la place qu'occupe ce chiffre, désigner la collection à laquelle appartiennent ses unités. L'exemple suivant éclaircira ceci :

2	4,	8	9	7,	3	2	1,	5	8	0,	3	4	6
dizaines de trillions.	TRILLIONS.	centaines de billions.	dizaines de billions.	BILLIONS.	centaines de millions.	dizaines de millions.	MILLIONS.	centaines de mille.	dizaines de mille.	MILLE.	centaines.	dizaines.	UNITÉS.

Digitized by Google

Les chiffres de ce nombre sont partagés, par des virgules, en groupes ou *tranches* de trois en trois, en commençant par la droite; mais la dernière tranche à gauche, qui, dans l'exemple actuel, n'a que deux chiffres, pourra quelquefois n'en avoir qu'un seul. Chacune de ces tranches répond aux collections désignées par les mots *unité, mille, million, billion, trillion,* et ses chiffres en expriment successivement les unités, les dizaines et les centaines. *On forme, par conséquent, l'expression en toutes lettres du nombre proposé, en énonçant chaque tranche comme si elle était seule, et en ajoutant après ses unités le nom qu'elles portent.*

Dans l'exemple ci-dessus, on lit : *vingt-quatre trillions, huit cent quatre-vingt-dix-sept billions, trois cent vingt et un millions, cinq cent quatre-vingt mille, trois cent quarante-six unités.*

9. Les nombres peuvent se considérer de deux manières, savoir : comme je viens de le faire, en ne particularisant point l'espèce de chose ou d'unité à laquelle ils se rapportent, et alors on les appelle *nombres abstraits;* ou bien en désignant l'espèce de leurs unités, comme quand on dit deux hommes, cinq années, trois heures, etc., et ce sont alors des *nombres concrets.*

Il est évident que la formation des nombres, par la réunion successive des unités, ne tient point à la nature de ces unités, et qu'il en est de même de toutes les propriétés qui résultent de cette formation, d'après lesquelles on parvient à composer et à décomposer les nombres les uns par les autres, ce qu'on appelle *calculer.* Je vais donc exposer les principales règles du calcul des nombres, sans avoir égard à la nature de leurs unités.

Digitized by Google

De l'Addition.

10. Cette opération, qui a pour but de réunir plusieurs nombres en un seul, n'est qu'une abréviation de la formation des nombres par la réunion successive des unités. Si, par exemple, à sept on voulait ajouter cinq, il faudrait, dans la suite des noms *un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit*, etc., assignés aux nombres, s'élever de cinq degrés au-dessus du mot *sept*, et l'on parviendrait alors au mot *douze*, qui répond, par conséquent, à la réunion de sept unités avec cinq. C'est sur ce procédé que sont fondées toutes les additions des petits nombres, et dont les résultats sont appris de mémoire. Son application immédiate aux nombres un peu grands serait impraticable; mais alors on les conçoit décomposés dans leurs diverses collections d'unités, pour effectuer séparément la réunion de celles qui portent le même nom. Pour ajouter, par exemple, 27 avec 32, on réunit les 7 unités du premier nombre avec les 2 du second, ce qui en fait 9, puis les 2 dizaines du premier avec les 3 du second, ce qui fait 5 dizaines. L'ensemble de ces deux résultats forme un total de 5 dizaines et 9 unités, ou 59, qui exprime la somme des nombres proposés.

Quelque grands que soient les nombres qu'il faut ajouter ensemble, on peut leur appliquer ce qui vient d'être dit; mais il faut observer que les sommes partielles, résultantes de l'addition de deux nombres exprimés par un seul chiffre, peuvent souvent produire des dizaines, ou des unités de la collection supérieure, et qui doivent, par conséquent, être réunies avec celles de cette collection.

Dans l'addition des nombres 49 et 78, la somme des unités 9 et 8 en produit 17, dont il faut réserver 10, ou une dizaine, pour joindre à la somme des dizaines des nombres proposés : on dira donc 4 et 7 font 11, et en y joignant la dizaine réservée, on aura 12 pour la totalité

Digitized by Google

des dizaines contenues dans la somme de ces nombres, qui renfermera, par conséquent, 1 centaine, 2 dizaines et 7 unités, ce qui fera 127.

11. En partant de ces principes, on a trouvé une manière de disposer les nombres à ajouter, qui facilite la réunion de leurs diverses collections d'unités, et l'on a formé une règle que l'exemple suivant fera suffisamment connaître :

Soient les nombres 527, 2519, 9812, 73 et 8 ; pour les ajouter ensemble, on commence par les écrire les uns sous les autres, en plaçant les unités de même ordre dans une même colonne, puis on tire un trait pour les séparer du résultat qu'on met au-dessous :

	527
	2519
	9812
	73
	8
Somme.....	12939

On fait d'abord la somme des nombres contenus dans la colonne des unités, et, comme on trouve 29, on n'écrit que les 9 unités, et l'on retient les 2 dizaines pour les joindre à celles qui sont contenues dens la colonne suivante, qui, par le moyen de cet accroissement, contient 13 unités de son ordre ; on n'écrit encore au-dessous que les 3 unités, et l'on retient la dizaine pour la joindre à la colonne suivante. On opère sur celle-ci comme sur la précédente, et l'on trouve 19 ; on n'écrit encore que les 9 unités, et l'on retient la dizaine pour la colonne suivante, dont la somme est alors composée de 12 unités ; on écrit les 2 unités sous cette colonne, et l'on place la dizaine à la gauche, ce qui revient à écrire la somme de la dernière colonne telle qu'on l'a trouvée. On a, par ce moyen, 12939 pour la somme des nombres proposés.

Digitized by Google

12. Le procédé qu'on vient de suivre peut s'énoncer comme il suit : *Écrire, les uns sous les autres, les nombres à ajouter, en plaçant leurs unités de même ordre dans une même colonne ; souligner le dernier nombre pour le séparer du résultat ; ajouter successivement, en commençant par la droite, les nombres contenus dans chaque colonne : si la somme ne surpasse pas* 9, *l'écrire telle qu'on l'a trouvée, et si elle renferme des dizaines, les retenir pour les joindre à la colonne suivante ; enfin, à la dernière colonne, écrire la somme trouvée.*

On pourra s'exercer sur les exemples suivants :

7861	66947	4649
345	46742	928
8023	132684	9298
16229	246373	14875

De la Soustraction.

13. Après avoir appris à composer un nombre par l'addition de plusieurs autres, la première question qui se présente est d'ôter un nombre d'un autre qui le surpasse, ou, ce qui revient au même, de décomposer celui-ci en deux parties, dont l'une soit l'autre nombre donné. Si l'on avait, par exemple, le nombre 9, et qu'on en voulût retrancher 4, il serait, par cette opération, décomposé en deux parties qui le reproduiraient par l'addition.

Pour parvenir à ôter un nombre d'un autre, lorsqu'ils ne sont pas considérables, il faut suivre une marche opposée à celle qu'on a prescrite au commencement du n° 10, pour trouver leur somme ; c'est-à-dire que dans la suite des noms assignés aux nombres, on doit, à partir du plus grand de ceux que l'on considère, descendre d'autant de degrés qu'il y a d'unités dans le plus petit,

Digitized by Google

et l'on arrivera au nom appliqué à la différence cherchée: c'est ainsi qu'en descendant de quatre degrés au-dessous du mot *neuf*, on parvient à *cinq*, nom qui exprime le nombre qu'il faut ajouter à 4 pour former 9, ou qui marque de combien 9 surpasse 4.

Sous ce dernier point de vue, 5 est l'*excès* de 9 sur 4. Si l'on ne voulait que marquer l'inégalité des nombres 9 et 4, sans fixer l'attention sur l'ordre de leurs grandeurs, on dirait que leur *différence* est 5. Enfin, si l'on faisait l'opération pour ôter 4 de 9, on dirait que le *reste* est 5. On voit que, quoique synonymes, les mots *reste*, *excès*, *différence* répondent chacun à une manière particulière d'envisager la décomposition du nombre 9 dans les deux parties 4 et 5, opération qu'on désigne toujours par le nom de *soustraction*.

14. Lorsqu'il s'agit de nombres un peu grands, la soustraction s'opère par parties, en retranchant successivement des unités de chaque ordre, marquées dans le plus grand des deux nombres, celles des ordres correspondants, marquées dans le plus petit. Pour le faire commodément, on dispose ces nombres comme 9587 et 345 dans l'exemple ci-dessous :

	9587
	345
Reste.....	9242

et l'on place au-dessous de chaque colonne l'excès du nombre supérieur sur le nombre inférieur contenu dans cette colonne, en disant :

5 ôtés de 7, reste 2,
4 ôtés de 8, reste 4,
3 ôtés de 5, reste 2;

et, posant ensuite le chiffre 9, duquel il n'y a rien à ôter, le reste 9342 marque de combien 9587 surpasse 345.

Digitized by Google

L'exactitude du procédé qu'on vient de suivre est incontestable, puisqu'en ôtant du plus grand des deux nombres toutes les parties contenues dans le plus petit, on a évidemment ôté ce plus petit.

15. L'application de ce procédé demande quelques attentions particulières, lorsque quelques-uns des ordres d'unités du nombre à retrancher en contiennent plus que les ordres correspondants de l'autre nombre.

Soit, par exemple, 397 à retrancher de 524:

	524
	397
Reste.....	127

Dans l'opération figurée ci-dessus, on ne pourra pas ôter immédiatement les unités du nombre inférieur de celles du nombre supérieur; mais le nombre 524, représenté ici par 5 centaines, 2 dizaines et 4 unités, peut être exprimé d'une manière différente, en décomposant quelques-unes des collections d'unités qu'il contient, pour en réunir une partie avec d'autres d'un ordre inférieur. Au lieu des 2 dizaines et 4 unités qui le terminent, on peut substituer par la pensée 1 dizaine et 14 unités; retranchant alors de ces dernières les 7 unités du nombre inférieur, on écrira au-dessous le reste 7. Par cette nouvelle décomposition, le nombre supérieur ne renferme plus qu'une dizaine, dont on ne saurait, par conséquent, ôter les 9 du nombre inférieur; mais sur les 5 centaines exprimées dans le nombre supérieur, on peut en prendre 1 pour la joindre avec la dizaine restante, et l'on aura alors 4 centaines et 11 dizaines: retranchant de celles-ci les 9 du nombre inférieur, il en restera 2. Enfin on ôtera des 4 centaines laissées dans le nombre supérieur, les 3 du nombre inférieur; on écrira le reste 1, et l'on aura 127 pour le résultat de l'opération proposée.

Cette manière d'opérer consiste, comme on voit, à

Digitized by Google

emprunter dans l'ordre supérieur une unité pour la joindre, suivant sa valeur, à celles de l'ordre sur lequel on opère, en observant ensuite de compter pour une unité de moins le chiffre supérieur lorsqu'on y arrivera.

16. Quand il manque des ordres d'unités dans le plus grand des deux nombres, c'est-à-dire qu'il y a des zéros entre ses chiffres significatifs, il faut s'avancer jusqu'au premier de ces chiffres, à gauche, pour faire l'emprunt convenable. En voici un exemple :

	7002
	3495
Reste.....	3507

Ne pouvant ôter les 5 unités du nombre inférieur des 2 du nombre supérieur, on retire 10 unités des 7000 marquées par le chiffre 7, il en reste alors 6990, et en joignant les 10 premières au chiffre 2, le nombre supérieur se trouve décomposé en 6990 et 12; retranchant de ce dernier nombre les 5 unités du nombre inférieur, on aura 7 pour les unités du reste.

Cette première opération a laissé dans le nombre supérieur, 6990 unités ou 699 dizaines, au lieu de 700 qui sont exprimées par les trois derniers chiffres à gauche, ce qui remplace, par conséquent, les deux zéros par des 9, et diminue de l'unité le premier chiffre significatif à gauche. En continuant sur ce pied la soustraction dans les autres colonnes, elle ne souffre aucune difficulté, et l'on trouve le reste écrit au-dessous de l'exemple.

17. En résumant les remarques qu'on a faites dans les deux numéros précédents, la règle à suivre pour opérer la soustraction sur deux nombres quelconques peut s'énoncer ainsi : *Placer le plus petit nombre sous le plus grand, de manière que leurs unités de même ordre*

Digitized by Google

soient dans une même colonne; souligner le plus petit pour le séparer du résultat; retrancher successivement, dans chaque colonne, en commençant par la droite, le nombre inférieur du nombre supérieur: si cela ne se peut, augmenter le chiffre supérieur de 10 *unités; compter le premier chiffre significatif qui vient après celui-là pour* 1 *unité de moins, et s'il y a des zéros intermédiaires, les regarder comme des* 9.

18. On peut, pour plus de facilité, lorsqu'il faudrait diminuer le chiffre supérieur d'une unité, le compter pour ce qu'il vaut, et joindre cette unité au chiffre inférieur correspondant, qui, se trouvant augmenté, conduit, ainsi que cela doit être, à un reste moindre d'une unité, que celui qui résulterait des chiffres écrits. Dans le premier des exemples ci-dessous, après avoir ôté 6 unités de 14, on comptera le 8 inférieur pour un 9, et ainsi des autres :

16844	103034	49812002
9786	69845	18924983
7058	33189	30887019

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction.

19. En effectuant une opération, d'après un procédé dont la légitimité est établie sur des principes sûrs, on peut encore commettre quelques erreurs dans les additions ou soustractions partielles dont on cherche le résultat dans sa mémoire; pour prévenir cet inconvénient, on a recours à une opération inverse de la première, au moyen de laquelle on reconnaît si les résultats de celle-ci sont exacts : c'est ce qu'on appelle faire la *preuve* de l'opération proposée.

Celle de l'addition consiste à retrancher successivement

Digitized by Google

de la somme des nombres ajoutés, toutes les parties de ces nombres; et si l'opération a été bien faite, on ne doit trouver aucun reste. Je vais montrer sur l'exemple du n° 11 comment on effectue toutes ces soustractions :

	527
	2519
	9812
	73
	8
Somme égale.....	12939
	1120

On ajoute d'abord les nombres contenus dans la colonne la plus à gauche, qui renferme ici des mille, et l'on retranche la somme 11 du nombre 12 qui commence le résultat. On écrit au-dessous la différence 1, produite par la retenue faite sur la colonne des centaines, dans l'opération primitive. La somme de la colonne des centaines, prise isolément, ne s'élève plus qu'à 18; si on la retranche des 9 centaines écrites au résultat et jointes au mille provenant de la colonne précédente, à gauche, et considéré comme 10 centaines, le reste 1, écrit au-dessous, marquera encore la retenue faite sur la colonne des dizaines. La somme 11 de celle-ci, retranchée de 13, laisse pour reste 2 dizaines provenant de la retenue faite sur la colonne des unités. En joignant ces 2 dizaines avec les 9 unités marquées au résultat, on forme le nombre 29, qui doit être précisément la somme de la colonne des unités, sur laquelle aucune autre n'a pu influer : en ajoutant donc de nouveau les nombres contenus dans cette colonne, on doit encore, si l'opération a été bien faite, parvenir au même résultat et n'avoir, par conséquent, aucun reste. C'est ce qui arrive, en effet, dans l'exemple actuel, et ce que marque le 0 écrit sous cette colonne. Le procédé que je viens d'expliquer, se résume ainsi : *Pour faire la preuve de l'addition,*

Digitized by Google

il faut ajouter de nouveau, en commençant par la gauche, chacune des colonnes de l'opération ; retrancher la somme obtenue en dernier lieu, de celle qui est marquée au-dessous ; écrire les restes qu'on trouve, et les joindre comme des dizaines à la colonne suivante à droite : si l'opération a été bien faite, il ne doit rien rester à la dernière colonne.

20. *La preuve de la soustraction se tire immédiatement de ce que le plus petit nombre ajouté avec le reste compose le plus grand.* Ainsi, pour s'assurer de l'exactitude de la soustraction suivante :

	524
	297
Reste.....	227
	524

on a ajouté au reste le plus petit nombre, et le résultat s'est trouvé, en effet, égal au plus grand.

De la Multiplication.

21. Lorsque les nombres à ajouter entre eux sont égaux, l'addition prend le nom de *multiplication*, parce que la somme est alors composée de l'un de ces nombres *répété autant de fois qu'il y avait de nombres à ajouter ;* réciproquement, si l'on veut répéter un nombre plusieurs fois, on y parviendra en ajoutant ce nombre à lui-même autant de fois, moins une, qu'il doit être répété. Par exemple, par l'addition suivante :

16
16
16
16
64

Digitized by Google

on répète le nombre 16 quatre fois, et il se trouve ajouté trois fois à lui-même.

Répéter un nombre deux fois, c'est le *doubler;* trois fois, c'est le *tripler;* quatre fois, c'est le *quadrupler,* et ainsi de suite.

22. Une multiplication renferme trois nombres, savoir : celui qu'on répète, et qui s'appelle *multiplicande;* le nombre qui désigne combien de fois on le répète, et qui s'appelle *multiplicateur;* enfin le résultat de l'opération, qui se nomme *produit.* Le *multiplicande* et le *multiplicateur,* considérés comme concourant ensemble à former le *produit,* sont appelés *facteurs* de ce *produit.* Dans l'exemple ci-dessus, 16 est le *multiplicande,* 4 le *multiplicateur,* 64 le *produit;* et l'on voit que 4 et 16 sont des facteurs de 64.

23. Lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont de grands nombres, la formation du produit par l'addition répétée du multiplicande prendrait un temps très-considérable; on a cherché, en conséquence, à l'abréger, en la décomposant en un certain nombre d'opérations partielles, faciles à effectuer de mémoire. On répéterait, par exemple, quatre fois le nombre 16, en prenant séparément le même nombre de fois les 6 unités et la dizaine dont il se compose : il suffit donc de connaître les produits que donnent les nombres d'unités de chaque ordre du multiplicande par le multiplicateur, lorsque ce dernier nombre n'a qu'un seul chiffre; et cela revient, pour tous les cas possibles, à trouver le produit de l'un quelconque des neuf premiers nombres par tout autre de ces nombres.

24. Ces produits sont contenus dans la Table suivante, attribuée à Pythagore :

Digitized by Google

TABLE DE PYTHAGORE.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

25. Pour former cette Table, on écrit d'abord sur une même ligne les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On ajoute ensuite chacun de ces nombres à lui-même, et l'on écrit la somme sur la seconde ligne, qui se trouve composée alors du double de chaque nombre de la première, ou du produit de ce nombre par 2.

On ajoute de même à chacun des nombres de la seconde ligne celui qui lui correspond dans la première, et l'on dispose les sommes sur une troisième ligne, qui renferme ainsi le triple de chacun des nombres de la première, ou leurs produits par 3. Par l'addition des nombres de la première ligne avec ceux de la troisième, on en formera une quatrième, qui contiendra le quadruple de chaque nombre de la première, ou le produit de ce nombre par 4; et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on soit parvenu à la neuvième ligne, qui contient les produits des nombres de la première, multipliés chacun par 9.

Il est à propos de remarquer que les divers produits d'un nombre quelconque par les nombres 2, 3, 4, 5, etc.,

Digitized by Google

se nomment les *multiples* de ce nombre : ainsi 6, 9, 12, 15, etc., sont les multiples de 3.

26. Quand on a bien conçu la formation de cette Table, il est facile d'en connaître l'usage. En effet, si l'on demandait, par exemple, le produit de 7 par 5, il faudrait, dans la cinquième ligne qui renferme les divers produits des neuf premiers nombres multipliés par 5, prendre celui qui répond au-dessous de 7 : on trouverait ainsi 35. Il en est de même pour tout autre exemple : *le produit se trouve dans la ligne du multiplicateur, au-dessous du multiplicande.*

27. En cherchant dans la Table de Pythagore le produit de 5 par 7, on trouvera encore, comme ci-dessus, 35, quoiqu'on ait considéré cette fois 5 comme le multiplicande, et 7 comme le multiplicateur. Cette observation, qu'on peut répéter sur chacun des produits contenus dans la Table, est générale, et l'*on peut toujours, dans quelque multiplication que ce soit, renverser l'ordre des facteurs, c'est-à-dire prendre le multiplicateur pour multiplicande, et le multiplicande pour multiplicateur.*

Comme la Table de Pythagore ne renferme qu'un nombre limité de produits, il ne suffirait pas d'avoir vérifié dans cette Table la conclusion énoncée plus haut ; car on pourrait craindre qu'elle ne fût pas vraie pour des produits plus grands, dont le nombre est illimité : il n'y a qu'un raisonnement indépendant de toute valeur particulière du multiplicande et du multiplicateur, qui puisse montrer que la conclusion dont il s'agit ne souffre aucune exception. En voici un d'autant plus propre à remplir ce but, qu'il offre une image sensible de la manière dont se forme le produit de deux nombres. Pour le faire mieux concevoir, je l'appliquerai d'abord aux nombres 5 et 3.

Si l'on écrit sur une même ligne 5 fois le chiffre 1, et

Digitized by Google

qu'on place deux lignes semblables au-dessous de la première, comme on le voit ci-après :

1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,
1, 1, 1, 1, 1,

le nombre total des chiffres 1 sera composé d'autant de fois 5 qu'il y a de lignes, c'est-à-dire de 3 fois 5. Mais par la disposition de ces lignes, les chiffres 1 sont rangés en colonnes qui en contiennent 3 ; en les comptant de cette manière, on trouve autant de fois 3 unités qu'il y a de colonnes, ou 5 fois 3 unités ; et le résultat ne dépendant point de la manière de compter, il s'ensuit que 3 fois 5, et 5 fois 3 donnent le même produit. Il est facile d'étendre ce raisonnement à des nombres quelconques, en concevant que chaque ligne contienne autant d'unités qu'il y en a dans le multiplicande, et qu'on ait placé, les unes sous les autres, un nombre de lignes égal au multiplicateur. En comptant alors le produit par lignes, il résulte du multiplicande répété autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur ; mais l'assemblage des chiffres écrits présente autant de colonnes qu'il y a d'unités dans une ligne, et chaque colonne contient autant d'unités qu'il y a de lignes : si donc on veut compter par colonnes, on répétera le nombre de lignes, ou le multiplicateur, autant de fois qu'il y a d'unités dans une ligne, c'est-à-dire autant de fois que le marque le multiplicande. Il est par conséquent permis, dans la formation du produit de deux nombres quelconques, de prendre pour multiplicateur celui de ces nombres qu'on voudra.

28. Le raisonnement que je viens de rapporter pour prouver la vérité de la proposition précédente en est la *démonstration ;* et il faut bien remarquer que ce qui constitue l'essence de la méthode suivie dans les Mathématiques pures, c'est qu'on n'y admet aucune proposi-

Digitized by Google

tion ou aucun procédé qui ne soit la conséquence nécessaire des premières notions sur lesquelles on s'est appuyé, ou dont la vérité ne soit établie en général, d'après des raisonnements indépendants des exemples particuliers, qui ne peuvent jamais former de preuve, et qui ne servent qu'à faciliter au lecteur l'intelligence des raisonnements ou la pratique des règles.

29. Connaissant tous les produits que donnent les neuf premiers nombres, combinés entre eux, on peut, suivant la remarque du n° 23, multiplier un nombre quelconque par un nombre d'un seul chiffre, en formant successivement le produit des unités de chaque ordre du multiplicande par le multiplicateur; et l'opération se dispose de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 526 \\ \underline{7} \\ 3682 \end{array}$$

Le produit des unités 6 du multiplicande par le multiplicateur 7 étant 42, on n'écrit que les 2 unités et l'on retient les 4 dizaines pour les joindre à celles qu'on trouvera plus loin.

Le produit des dizaines 2 du multiplicande par le multiplicateur 7 est 14, et en y ajoutant les 4 dizaines retenues précédemment, on forme le nombre 18, dont on n'écrit encore que les unités, en retenant la dizaine pour l'opération suivante.

Le produit des centaines 5 du multiplicande par le multiplicateur 7 est 35; augmenté de la retenue 1 faite précédemment, il devient 36, et s'écrit tout entier, parce qu'il n'y a plus de chiffres au multiplicande.

30. Ce procédé s'énonce ainsi : *Pour multiplier un nombre composé de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul, on place le multiplicateur sous les unités du*

Digitized by Google

multiplicande; on tire un trait au-dessous de ces nombres pour les séparer du produit ; on multiplie successivement, en commençant par la droite, les unités de chaque ordre du multiplicande, par le multiplicateur ; on écrit le produit tout entier lorsqu'il ne passe pas 9 : *mais s'il renferme des dizaines, on les retient pour les joindre au produit suivant, et l'on continue ainsi jusqu'au dernier chiffre à gauche du multiplicande, dont on écrit le résultat tel qu'il se trouve.*

Il est évident que lorsque le multiplicande est terminé par des zéros, l'opération ne doit commencer qu'au premier chiffre significatif de ce nombre, mais que pour donner au produit la valeur qu'il doit avoir, il faut mettre à sa droite autant de zéros qu'il s'en trouve à celle du multiplicande. A l'égard des zéros qui seraient placés entre les chiffres du multiplicande, ils ne donnent aucun produit, et l'on doit, par conséquent, mettre un zéro lorsqu'on n'a rien retenu du produit précédent.

Voici quelques exemples pour exercer le lecteur :

956	8200	7012	80970
6	9	5	4
5736	73800	35060	323880

31. Les nombres les plus simples, exprimés par plusieurs chiffres, étant 10, 100, 1000, etc., il faut d'abord chercher comment on peut multiplier par chacun de ces nombres un nombre quelconque. Or, en se rappelant la convention établie dans le n° 6, d'après laquelle le même chiffre prend une valeur de 10 en 10 fois plus grande à mesure qu'on l'avance vers la gauche, on concevra que pour multiplier un nombre quelconque par 10, il faut rendre dix fois plus grande chacune des collections d'unités dont il se compose, c'est-à-dire changer les unités en dizaines, les dizaines en centaines, et ainsi de suite, et qu'on opère cet effet en plaçant un zéro à la droite du

Digitized by Google

nombre proposé, puisque tous ses chiffres significatifs se trouveront avancés d'un rang vers la gauche.

Par la même raison, on multiplierait par 100 un nombre quelconque, en plaçant à sa droite deux zéros, puisque par le premier zéro, le nombre devenant 10 fois plus grand qu'il n'était d'abord, deviendrait encore 10 fois plus grand par le second zéro, et serait par conséquent 10 fois 10, ou 100 fois plus grand qu'il n'était en premier lieu.

En continuant ce raisonnement, on verra que, d'après notre système de numération, on multiplie un nombre par 10, 100, 1000, etc., en écrivant à la droite du multiplicande autant de zéros qu'il y en a dans le multiplicateur, à la droite de l'unité.

32. Lorsque le chiffre significatif du multiplicateur est différent de l'unité, qu'il s'agit, par exemple, de multiplier par 30, ou par 300, ou par 3000, qui ne sont autre chose que 10 fois 3, ou 100 fois 3, ou 1000 fois 3, etc., l'opération se décompose en deux autres: on multiplie d'abord par le chiffre significatif 3, suivant la règle du n° 30, et ensuite on multiplie le produit par 10, 100 ou 1000, etc. (comme il vient d'être dit dans le numéro précédent), en érivant un, deux, trois, etc., zéros à la droite de ce produit.

Soit, par exemple, 764 à multiplier par 300 :

	764
	300
Produit.....	229200

Les quatre chiffres significatifs de ce produit résultent de la multiplication de 764 par 3; on les recule de deux rangs vers la gauche, pour placer les deux zéros qui terminent le multiplicateur.

En général, *lorsque le multiplicateur sera suivi d'un*

Digitized by Google

nombre quelconque de zéros, on multipliera d'abord le multiplicande par le chiffre significatif du multiplicateur, et l'on placera à la suite du produit autant de zéros qu'il y en a dans le multiplicateur.

33. Les règles précédentes s'appliquent au cas où le multiplicateur est quelconque, en considérant à part chacune des collections d'unités dont il est composé. Multiplier, par exemple, 793 par 345, ou, ce qui revient au même, répéter 345 fois le nombre 793, c'est prendre 793, 5 fois, plus 40 fois, plus 300 fois, et l'opération à faire se trouve décomposée en trois autres dans lesquelles les multiplicateurs 5, 40 et 300 n'ont qu'un chiffre significatif.

Pour réunir facilement le résultat de ces trois opérations, on dispose le calcul comme il suit :

$$\begin{array}{r} 793 \\ 345 \\ \hline 3965 \\ 31720 \\ 237900 \\ \hline 273585 \end{array}$$

On multiplie successivement le multiplicande par les unités, les dizaines, les centaines, etc., du multiplicateur, en observant de placer un zéro à la droite du produit partiel donné par les dizaines du multiplicateur, et deux zéros à la droite du produit donné par les centaines; ce qui avance le premier de ces produits d'un rang vers la gauche, et le second de deux. On fait ensuite l'addition des trois produits partiels pour obtenir le produit total des nombres proposés.

Les zéros mis à la suite des produits partiels ne comptant pour rien dans cette addition, on peut se dispenser de les écrire, pourvu qu'on ait soin de placer au rang qu'il doit occuper le premier chiffre du produit donné par

Digitized by Google

chaque chiffre significatif du multiplicateur, c'est-à-dire au rang des dizaines le produit donné par les dizaines du multiplicateur, au rang des centaines le produit donné par les centaines du multiplicateur, et ainsi de suite.

34. D'après ce qui précède, on énonce la règle suivante : *Pour multiplier deux nombres quelconques l'un par l'autre, on forme successivement* (selon la règle du n° 30) *les produits du multiplicande par les divers ordres d'unités du multiplicateur, en observant de placer le premier chiffre de chaque produit partiel, sous les unités de l'ordre dont est le chiffre du multiplicateur qui donne ce produit, et l'on ajoute ensuite tous les produits partiels.*

35. Lorsque le multiplicande est terminé par des zéros, on peut les négliger d'abord, et commencer toutes les multiplications partielles au premier chiffre significatif du multiplicande; mais pour placer ensuite au rang qui leur convient les chiffres du produit total, il faut écrire à la droite de ce produit autant de zéros qu'il y en avait à celle du multiplicande.

Si le multiplicateur était terminé par un ou plusieurs zéros, la remarque du n° 32 permettrait de négliger encore ceux-ci, pourvu que l'on en écrivît un pareil nombre à la droite du produit.

Il résulte de là que, *lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont terminés par des zéros, on ne s'occupe d'abord que des chiffres significatifs, et l'on met à la droite du produit obtenu d'après ces chiffres, autant de zéros qu'il y en avait tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.*

Lorsqu'il y a des zéros entre les chiffres significatifs du multiplicateur, comme ils ne donnent aucun produit, on les passe en observant de placer dans le rang qui leur convient les unités du produit résultant du chiffre significatif écrit à la gauche de ces zéros.

Digitized by Google

Le lecteur pourra s'exercer sur ces exemples :

300	526	9648
40	307	5137
12000	3682	67536
	157800	289440
	161482	964800
		48240000
		49561776

De la Division.

36. Le produit de deux nombres étant formé de l'un de ces nombres répété autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre (21), on peut revenir d'un produit quelconque à l'un de ses facteurs, en cherchant combien de fois ce produit contient son autre facteur : la soustraction seule suffit pour cette recherche. En effet, si l'on voulait savoir combien de fois 64 contient 16, il n'y aurait qu'à retrancher 16 de 64 autant de fois que la chose serait possible; et comme après quatre soustractions il ne resterait rien, on en conclurait que le nombre 16 est contenu 4 fois dans 64. Cette manière de décomposer un nombre par un autre, pour savoir combien il contient cet autre, se nomme *division*, parce qu'elle sert à diviser ou à partager un nombre donné en parties égales, dont le nombre ou la valeur sont donnés.

Si l'on avait, par exemple, à diviser 64 en 4 parties égales, pour trouver la valeur de ces parties, il faudrait chercher le nombre qui est contenu 4 fois dans 64, et par conséquent regarder 64 comme un produit ayant pour facteurs 4 et l'une des parties cherchées, qui est ici 16. Si l'on demandait de combien de parties égales à 16 le nombre 64 est composé, il faudrait, pour connaître le nombre de ces parties, chercher combien de fois 64 contient 16, et par conséquent on devrait regarder 64 comme

Digitized by Google

un produit dont un des facteurs serait 16, et l'autre le nombre cherché, qui est ici 4.

Quel que soit donc celui de ses usages que l'on ait en vue, *la division revient à trouver l'un des facteurs d'un produit donné, lorsqu'on connaît l'autre facteur.*

37. Le nombre qu'il faut diviser se nomme *dividende;* le facteur connu, et par lequel on doit diviser, se nomme *diviseur;* le facteur inconnu que l'on trouve par la division, se nomme *quotient,* et indique toujours combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.

Il suit de ce qui vient d'être dit, que *le diviseur multiplié par le quotient doit reproduire le dividende.*

38. Lorsque le dividende peut contenir un grand nombre de fois le diviseur, il n'est guère praticable d'employer la soustraction répétée pour parvenir au quotient; il faut alors recourir à une abréviation analogue à celle qu'on a donnée par la multiplication. Si le dividende n'est pas dix fois plus grand que le diviseur, ce qu'on peut voir à la seule inspection de ces nombres, et si le diviseur n'a qu'un seul chiffre, on trouvera le quotient par la Table de Pythagore, puisqu'elle renferme tous les produits dont les facteurs n'ont qu'un chiffre. Si l'on demandait, par exemple, combien de fois 56 contient 8, il faudrait descendre dans la huitième colonne, jusqu'à la ligne où se trouve 56; le chiffre 7, placé à la tête de cette ligne, indique le second facteur du nombre 56, ou combien de fois ce nombre contient 8.

On voit, par cette même Table, qu'il y a des nombres qui ne peuvent être exactement divisés par d'autres. Par exemple, la septième ligne qui contient tous les multiples de 7, ne renfermant pas le nombre 40, il en résulte qu'il n'est pas divisible par 7; mais comme il est compris entre 35 et 42, on voit que le plus grand multiple de 7 qu'il puisse contenir est 35, dont les facteurs sont 5 et 7.

Digitized by Google

Avec ces éléments, et par les considérations que je vais exposer, on peut effectuer une division quelconque.

39. Soit, par exemple, à diviser 1656 par 3; on peut changer la question en cette autre : *Trouver un nombre tel, qu'en multipliant ses unités, dizaines, centaines, etc., par* 3, *on obtienne pour produit les unités, dizaines, centaines, etc., du dividende* 1656.

Il est visible que ce nombre n'aura pas d'unité d'un ordre plus élevé que les mille; car s'il avait seulement des dizaines de mille, on aurait aussi des dizaines de mille au produit, et c'est ce qui n'a pas lieu. Il n'aura pas non plus d'unités de l'ordre des mille; car s'il en avait seulement une, le produit en contiendrait au moins trois, et c'est encore ce qui n'a pas lieu.

Ceci montre que le mille qui se trouve au dividende est une retenue que l'on obtient quand on multiplie par le diviseur 3, les centaines du quotient.

Cela posé, le chiffre des centaines du quotient cherché doit être tel, qu'en multipliant le nombre qu'il exprime par 3, on ait pour produit 16, ou seulement le plus grand multiple de 3 qui soit contenu dans 16, à cause des retenues qu'a pu fournir la multiplication des autres chiffres du quotient par le diviseur, retenues qui ont dû se réunir au produit des centaines.

Le nombre qui remplit cette condition est 5; mais 5 centaines multipliées par 3 donnent 15 centaines, et le dividende 1656 en contient 16 : la différence 1 centaine provient donc des retenues résultant de la multiplication des autres chiffres du quotient par le diviseur. Si maintenant on retranche le produit partiel 15 centaines, ou 1500 du produit total 1656, le reste 156 contiendra les produits des unités et des dizaines du quotient par le diviseur; et tout se réduira à trouver un nombre qui, multiplié par 3, donne 156, question précisément semblable à celle qui s'est présentée d'abord. Ainsi, lorsqu'on aura

Digitized by Google

trouvé le premier chiffre du quotient dans cette dernière, comme on l'a fait dans la précédente, on multipliera le nombre qu'il exprime par le diviseur, et retranchant ce produit partiel du produit total, on aura pour résultat un nouveau dividende, sur lequel on opérera comme sur le précédent; et ainsi de suite jusqu'à ce que le dividende primitif soit épuisé.

40. L'opération que je viens de décrire se dispose comme on le voit ci-dessous :

```
divid. 1656 | 3 divis.
        15  |-----------
            | 552 quot.
       -----
        15
        15
       -----
         06
          6
       -----
          0
```

Le dividende et le diviseur sont séparés par un trait; on en tire un autre sous le diviseur pour marquer la place du quotient : cela fait, on prend sur la gauche du dividende la partie 16, capable de contenir le diviseur 3, et en la divisant par ce nombre, on a 5 pour le premier chiffre à gauche du quotient. Formant ensuite le produit du diviseur par le nombre qu'on vient de trouver, et le retranchant du dividende partiel 16, on écrit au-dessous le reste 1, à côté duquel on abaisse les dizaines 5 du dividende. Considérant ce dernier nombre comme un second dividende partiel, on le divise encore par le diviseur 3, et l'on obtient 5 pour le second chiffre du quotient; on fait le produit de ce nombre par le diviseur, qu'on retranche du dividende partiel, et l'on a zéro pour reste. On abaisse enfin le dernier chiffre du dividende 6; on divise ce troisième dividende partiel par le diviseur 3, et l'on a 2 pour le dernier chiffre du quotient.

Digitized by Google

41. Il est évident que si l'on trouvait un dividende partiel qui ne contînt pas le diviseur, ce ne pourrait être que parce que le quotient n'a pas d'unités de l'ordre de ce dividende, et que celles que ce même dividende renferme, viennent des produits du diviseur par les unités des ordres inférieurs du quotient : il faut donc, quand cela arrive, mettre un zéro au quotient, pour remplir la place de l'ordre d'unités qui manque.

Exemple. Soit

```
1535 | 5
15   |---
-----| 307
 035
  .35
 ----
   00
```

La division des 15 centaines du dividende par le diviseur, ne laissant aucun reste, les dizaines 3 qui forment le second dividende partiel ne peuvent contenir le diviseur. Il en résulte que le quotient ne doit point avoir de dizaines, et qu'il faut, par conséquent, en remplir la place par un zéro, pour donner au premier chiffre du quotient la valeur qu'il doit avoir par rapport aux autres ; puis abaissant le dernier chiffre du dividende, on forme un troisième dividende partiel, qui, divisé par 5, donne 7 pour les unités du quotient, et ce nombre est 307.

42. Les considérations exposées dans le n° 40 s'appliquent également aux cas où le diviseur contient un nombre quelconque de chiffres.

S'il s'agissait, par exemple, de diviser 57981 par 251, on verrait facilement que le quotient n'a pas de chiffres au delà des centaines, puisque s'il avait seulement des mille, le dividende contiendrait des centaines de mille, ce qui n'a pas lieu ; de plus, ce chiffre des centaines devrait être tel, que, multiplié par 251, il donnât pour produit 579, ou le plus grand multiple de 251, qui soit

Digitized by Google

contenu dans 579, l'excès de ce dernier provenant alors des retenues qu'a fournies la multiplication des autres chiffres du quotient par le diviseur. Le nombre qui vérifie cette condition est 2; mais 2 centaines multipliées par 251 font 502 centaines, et le dividende en contient 579: la différence 77 centaines provient donc des retenues résultantes de la multiplication des unités et dizaines du quotient par le diviseur.

Si maintenant on retranche le produit partiel 502 centaines, ou 50200, du produit total 57981, le reste 7781 contiendra les produits des unités et des dizaines du quotient par le diviseur; et tout se réduira encore à trouver un nombre qui, multiplié par 251, donne pour produit 7781. Ainsi, lorsqu'on aura déterminé le premier chiffre du quotient, on multipliera le nombre qu'il exprime par le diviseur; et retranchant le produit partiel du produit total, on aura pour résultat un nouveau dividende, sur lequel on opérera comme sur le précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce que le dividende soit épuisé.

Quant au dividende partiel qui doit donner le premier chiffre du quotient, il se forme toujours en séparant, sur la gauche du dividende total, assez de chiffres pour que le nombre qu'ils expriment, considéré comme représentant des unités simples, puisse contenir le diviseur.

43. En disposant l'opération comme précédemment, les calculs que l'on vient d'indiquer s'exécutent dans l'ordre suivant :

```
57981 | 251
502   | 231
------
778
753
-----
 251
 251
-----
 000
```

Digitized by Google

On prend les trois premiers chiffres à gauche du dividende, pour former le premier dividende partiel; on le divise par le diviseur; on écrit au quotient le nombre 2 qui en résulte; on multiplie le diviseur par ce nombre; on écrit le produit 502 sous le dividende partiel 579. La soustraction étant faite, on abaisse, à côté du reste 77, les dizaines 8 du dividende; on divise ce nouveau dividende partiel par le diviseur; on obtient 3 pour le second chiffre du quotient; on multiplie le diviseur par ce nombre; on retranche le produit du dividende partiel correspondant, et à côté du reste 25 on abaisse le dernier chiffre 1 du dividende : ce dernier dividende partiel 251, étant égal au diviseur, donne 1 pour les unités du quotient.

44. Lorsque le diviseur renferme plusieurs chiffres, on peut trouver quelque difficulté à reconnaître combien de fois ce nombre est contenu dans les dividendes partiels. L'exemple suivant est destiné à montrer comment on y parvient :

```
423405 | 485
3880   | 873
 3540
 3395
  1455
  1455
   0000
```

Il faut d'abord prendre quatre chiffres sur la gauche du dividende, pour former un nombre qui puisse renfermer le diviseur; et alors on ne voit pas tout de suite combien de fois 4234 peut contenir 485. Pour s'aider dans cette recherche, on observera que ce diviseur est compris entre 400 et 500, et que s'il était exactement l'un ou l'autre de ces nombres, la question serait réduite à trouver combien de fois 4 centaines ou 5 centaines sont contenues

Digitized by Google

dans les 42 centaines du nombre 4234, ou bien, ce qui revient au même, combien de fois les nombres 4 ou 5 sont contenus dans 42. On a, pour le premier, 10, et pour le second, 8 : c'est donc entre ceux-ci que se trouve le quotient cherché. On voit d'abord qu'il n'est pas possible d'employer 10, parce que cela supposerait que les unités de l'ordre supérieur aux centaines du dividende peuvent contenir le diviseur, ce qui n'est pas : il ne reste donc qu'à essayer lequel des deux nombres 9 ou 8, employé comme multiplicateur de 485, donne un produit qu'on puisse retrancher de 4234, et l'on trouve que c'est 8; c'est donc là le premier chiffre du quotient. En retranchant du dividende partiel le produit du diviseur multiplié par 8, on a pour reste 354; abaissant ensuite le zéro des dizaines du dividende, on forme un second dividende partiel, sur lequel on opère comme sur le précédent, et ainsi des autres.

45. Le résumé des articles précédents nous offre cette règle : *Pour diviser un nombre par un autre, on place le diviseur à la droite du dividende; on les sépare par un trait, et l'on en tire un autre sous le diviseur, pour marquer la place du quotient. On prend sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il en faut pour contenir le diviseur; on cherche combien de fois le nombre exprimé par le premier chiffre du diviseur est contenu dans celui que représentent le premier ou les deux premiers chiffres du dividende partiel; on multiplie ce quotient, qui n'est qu'approché, par le diviseur, et si le produit est plus fort que le dividende partiel, on ôte successivement autant d'unités du quotient qu'il est nécessaire pour obtenir un produit qui puisse se retrancher du dividende partiel; on fait la soustraction, et s'il restait plus que le diviseur, ce serait alors une preuve que le quotient a été trop diminué; on l'augmenterait en conséquence. A côté du reste, on abaisse le chiffre sui-*

Digitized by Google

vant du dividende ; on cherche, comme précédemment, combien de fois ce dividende partiel contient le diviseur ; on écrit au quotient le nombre trouvé, qu'on multiplie par le diviseur, pour retrancher le produit du dividende partiel ; on continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait abaissé tous les chiffres du dividende proposé. Lorsqu'on rencontre un dividende partiel qui ne contient pas le diviseur, il faut, avant d'abaisser un nouveau chiffre du dividende, poser un zéro au quotient.

46. On resserre dans un plus petit espace les opérations qu'exige la division, en effectuant de mémoire la soustraction des produits du diviseur par chaque chiffre du quotient, comme on va le voir dans l'exemple ci-dessous :

1755	39
195	45
000	

Après avoir trouvé que le premier dividende partiel 175 contient 4 fois le diviseur 39, on multiplie d'abord ses 9 unités par 4, ce qui donne 36 ; et pour retrancher ce produit des unités du dividende partiel, on ajoute aux 5 unités qu'il contient, 4 dizaines, ce qui fait 45 ; d'où retranchant 36, il reste 9. On retient ensuite les 4 dizaines pour les joindre par la pensée au produit 12 du quotient, par les dizaines du diviseur, ce qui fait 16 ; et en le retranchant de 17, on ôte les 4 dizaines dont on avait augmenté les unités du dividende, pour rendre possible la soustraction précédente. On opère de même sur le second dividende partiel 195, en disant 5 fois 9 font 45, ôtés de 45, reste zéro ; puis 5 fois 3 font 15 et 4 dizaines de retenue font 19, ôtés de 19, reste zéro.

On voit suffisamment par là comment on se conduirait sur tout autre exemple, quelque compliqué qu'il fût.

Digitized by Google

47. La division s'abrége encore lorsque le dividende et le diviseur sont terminés par plusieurs zéros, parce qu'on peut en supprimer, à la suite de chacun de ces nombres, autant qu'il y en a dans celui qui en contient le moins.

Si l'on avait, par exemple, 84000 à diviser par 400, on réduirait ces nombres à 840 et à 4; le quotient ne serait pas altéré; car on n'aurait fait que changer le nom des unités, puisqu'au lieu de 84000 ou de 840 centaines, de 400 ou de 4 centaines, on aurait 840 unités et 4 unités; et le quotient des nombres 840 et 4 demeure toujours le même, quelle que soit l'espèce de leurs unités.

Il faut remarquer aussi qu'en supprimant deux zéros à la suite des nombres proposés, on les a divisés en même temps l'un et l'autre par 100; car il suit du n° 31, qu'en effaçant 1, ou 2, ou 3 zéros à la droite d'un nombre quelconque, on le divise par 10, ou par 100, ou par 1000, et ainsi de suite.

Voici quelques exemples de division :

144	3	16512	344	3049164	6274
24	48	2752	48	53956	486
00		0000		37644	
				00000	

48. La division et la multiplication se servent réciproquement de preuve, comme la soustraction et l'addition, puisque, d'après la définition de la division (36), on doit, en divisant un produit par un de ses facteurs, trouver l'autre, et qu'en multipliant le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende (37).

Digitized by Google

Des Fractions.

49. La division ne peut pas toujours s'effectuer exactement, parce qu'un nombre quelconque d'unités ne se compose pas d'un autre nombre quelconque d'unités, pris un certain nombre de fois. On en a déjà vu des exemples dans la Table de Pythagore, qui ne renferme que les produits des neuf premiers nombres, multipliés deux à deux, et qui ne contient pas tous les nombres compris entre 1 et 81, le premier et le dernier de ceux qu'on y a inscrits. La méthode exposée ci-dessus ne conduit alors qu'à trouver le plus grand multiple du diviseur que puisse contenir le dividende.

Si l'on divisait 239 par 8, en suivant la règle du n° 46,

$$\begin{array}{r|l} 239 & 8 \\ \cline{2-2} 79 & 29 \\ 7 & \end{array}$$

comme le montre l'opération ci-dessus, on aurait pour dernier dividende partiel le nombre 79, qui ne contient pas 8 exactement, mais qui, tombant entre les nombres 72 et 80, dont l'un contient 9 fois, et l'autre 10 fois le diviseur 8, fait voir que la dernière partie du quotient est plus grande que 9 et moindre que 10, et que, par conséquent, le quotient total est entre 29 et 30. Faisant donc le produit des 9 unités du quotient par le diviseur 8, et le retranchant du dernier dividende partiel 79, le reste 7 sera évidemment l'excès du dividende 239 sur le produit des facteurs 29 et 8. En effet, ayant par les diverses parties de l'opération, retranché successivement du dividende 239 le produit de chaque chiffre du quotient par le diviseur, on a évidemment soustrait le produit du quotient entier, par le diviseur, ou 232; et le reste 7, moindre que le diviseur, prouve que 232 est le plus grand multiple de 8 que peut contenir 239.

Digitized by Google

50. Il est bon de se rappeler que, d'après ce qui vient d'être dit, pour retrouver un dividende quelconque, il faut ajouter au produit du diviseur par le quotient, le reste qu'a laissé la division lorsqu'elle n'a pu se faire exactement.

51. Si l'on voulait réellement partager en huit parties égales une grandeur d'espèce quelconque, composée de 239 unités, on ne le pourrait pas sans y mettre des portions d'unité ou des *fractions*. En effet, lorsqu'on aurait ôté du nombre 239 les 8 fois 29 unités qu'il contient, il resterait 7 unités à partager en 8 parties; et pour y parvenir, on pourrait diviser, l'une après l'autre, toutes ces unités en 8 parties, puis prendre une partie sur chaque unité, ce qui donnerait 7 parties qu'il faudrait joindre aux 29 unités entières, pour former la huitième partie de 239, ou le quotient exact de la division de ce nombre par 8.

Le même raisonnement pourrait se faire sur toute autre division qui laisserait un reste; et, dans ce cas, le quotient se compose de deux parties : l'une est formée d'unités entières, tandis que l'autre ne peut s'obtenir qu'après qu'on a réellement effectué le partage des unités concrètes ou matérielles du reste, dans le nombre de parties marquées par le diviseur : jusque-là on ne fait que l'indiquer, en disant qu'*il faut concevoir l'unité du dividende, divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le diviseur, et prendre autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le reste, pour compléter le quotient cherché.*

52. En général, lorsqu'on a voulu considérer des quantités moindres que l'unité, il a fallu, pour les rapporter à cette unité, la concevoir partagée en un certain nombre de parties assez petites pour pouvoir être contenues un certain nombre de fois dans ces quantités, ou les *mesurer*. Dans l'idée qu'on s'est formée ainsi de leur grandeur, il est donc entré deux éléments, savoir : combien de fois les

Digitized by Google

parties qui les mesurent sont contenues dans l'unité, et combien elles en renferment.

On a composé pour les fractions une nomenclature qui répond à la manière de les concevoir et de les représenter.

Celle qui résulte de la division de l'unité en 2 parties se nomme *moitié* ou *demie;*

en 3 parties, *tiers;*
en 4 parties, *quart;*
en 5 parties, *cinquième;*
en 6 parties, *sixième;*

et ainsi de suite, en ajoutant la terminaison *ième* au nombre qui marque combien on conçoit de parties dans l'unité.

Toute fraction s'exprime alors par deux nombres : le premier, qui fait connaître de combien de parties elle est composée, se nomme *numérateur;* et le dernier, qui marque combien il faut de ces parties pour former l'unité, s'appelle *dénominateur,* parce qu'on en déduit la dénomination de la fraction. Les *cinq sixièmes* de l'unité sont une fraction dont le numérateur est *cinq*, et le dénominateur *six*.

Le *numérateur* et le *dénominateur* s'appellent conjointement les deux *termes* de la fraction.

On se sert des chiffres pour abréger l'expression des fractions, en écrivant le dénominateur sous le numérateur, séparés l'un de l'autre par un trait :

un tiers s'écrit $\frac{1}{3}$,
cinq sixièmes, $\frac{5}{6}$.

53. D'après l'idée qu'on attache aux mots *numérateur* et *dénominateur,* il est évident *qu'on augmente une fraction en augmentant son numérateur, sans changer son dénominateur;* car ce dernier, marquant en combien de parties l'unité est divisée, fixe la grandeur de ces parties, qui demeure la même tant qu'il ne change pas; et en aug-

Digitized by Google

mentant le numérateur, on augmente le nombre de parties contenues dans la fraction, et par conséquent cette fraction. C'est ainsi, par exemple, que $\frac{8}{9}$ surpassent $\frac{7}{9}$, que $\frac{13}{30}$ surpassent $\frac{11}{30}$.

Il suit évidemment de cette considération, qu'*en répétant le numérateur* 2, 3, *ou un nombre quelconque de fois, sans toucher au dénominateur, on répète un pareil nombre de fois la quantité représentée par la fraction, ou elle se trouve multipliée par ce nombre;* car on la compose alors de 2, 3, ou d'un nombre quelconque de fois autant de parties qu'elle en contenait d'abord, et ces parties sont demeurées les mêmes. Ainsi la fraction $\frac{3}{5}$ est le triple de $\frac{1}{5}$, et $\frac{10}{21}$ le double de $\frac{5}{21}$.

On diminue une fraction en diminuant son numérateur, sans changer son dénominateur, puisqu'on prend pour la composer un nombre de parties moindre que celui qu'elle contenait d'abord, et que ces parties ont conservé la même grandeur. Donc, *si l'on divise par* 2, 3, *ou un nombre quelconque, le numérateur d'une fraction, sans toucher au dénominateur, on la rend un pareil nombre de fois plus petite, ou elle se trouve divisée par ce nombre;* car on la réduit à contenir 2, 3, ou un nombre quelconque de fois moins de parties qu'elle n'en contenait d'abord, et ces parties sont demeurées les mêmes. C'est ainsi que $\frac{1}{5}$ est le tiers de $\frac{3}{5}$, que $\frac{5}{21}$ sont la moitié de $\frac{10}{21}$.

54. Au contraire, *on diminue une fraction lorsqu'on augmente son dénominateur sans changer son numérateur;* car on conçoit alors plus de parties dans l'unité: elles deviennent donc plus petites; et comme on n'en prend encore que le même nombre pour former la fraction, leur ensemble compose, dans le second cas, une quantité moindre que dans le premier. C'est ainsi que $\frac{2}{5}$ sont moins que $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{13}$ moins que $\frac{4}{9}$.

Il suit de là, que *si l'on multiplie par* 2, 3, *ou par un*

Digitized by Google

nombre quelconque, le dénominateur d'une fraction, sans toucher au numérateur, la fraction devient un pareil nombre de fois plus petite, ou se trouve divisée par ce nombre; car on la compose toujours d'autant de parties qu'elle en contenait d'abord, mais chacune est devenue 2, 3, ou un nombre quelconque de fois plus petite. La fraction $\frac{3}{8}$ est la moitié de $\frac{3}{4}$, et $\frac{4}{15}$ le tiers de $\frac{4}{5}$.

On augmente une fraction lorsqu'on diminue son dénominateur, sans changer son numérateur, puisqu'en concevant alors moins de parties dans l'unité, chacune devient plus grande, et leur ensemble devient aussi plus grand.

Donc, *si l'on divise le dénominateur d'une fraction par* 2, 3, *ou un nombre quelconque, on rend cette fraction un pareil nombre de fois plus grande qu'auparavant, ou elle se trouve multipliée par ce nombre;* car on la compose toujours du même nombre de parties, mais devenues chacune 2, 3, ou un nombre quelconque de fois plus grandes qu'elles l'étaient d'abord. D'après cela, $\frac{3}{5}$ sont le triple de $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{6}$ sont le quadruple de $\frac{5}{24}$.

Il est à propos de remarquer que supprimer le dénominateur d'une fraction c'est la multiplier par ce nombre. Supprimer, par exemple, le dénominateur 3 dans la fraction $\frac{2}{3}$, c'est la changer en 2 entiers, ou la multiplier par 3.

55. On peut résumer comme il suit les propositions précédentes :

En multipliant En divisant	le numérateur,	on multiplie on divise	la fraction.
En multipliant En divisant	le dénominateur,	on divise on multiplie	la fraction.

56. La première conséquence qu'on doit tirer de ce tableau, c'est que les opérations faites sur le dénominateur produisent, sur la quantité représentée par la fraction, l'effet des opérations *contraires* ou *inverses*. Il

Digitized by Google

en résulte encore que *si l'on multiplie à la fois le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre, la fraction ne changera pas de valeur;* car si, d'un côté, en multipliant le numérateur, on rend la fraction 2, 3, etc., fois plus grande qu'auparavant, de l'autre, par la seconde opération, on en prend la moitié, le tiers, etc.; en un mot, on la divise par le même nombre qui l'avait multipliée d'abord. Ainsi $\frac{1}{6}$ est égal à $\frac{3}{18}$, et $\frac{5}{21}$ sont égaux à $\frac{10}{42}$.

57. On voit de même que *si l'on divise à la fois par le même nombre le dénominateur et le numérateur d'une fraction, sa valeur ne change point;* car si, d'un côté, en divisant le numérateur, on rend la fraction 2, 3, etc., fois plus petite qu'auparavant, de l'autre, par la seconde opération, on en prend le double, le triple, etc.; en un mot, on la multiplie par le même nombre qui l'avait divisée d'abord. Ainsi la fraction $\frac{2}{4}$ est égale à $\frac{1}{2}$, et $\frac{3}{9}$ est égale à $\frac{1}{3}$.

58. Il n'en est pas des fractions comme des nombres entiers, dans lesquels une grandeur, tant qu'on la rapporte à la même unité, n'est susceptible que d'une seule expression; par les fractions, au contraire, la même grandeur peut être exprimée d'une infinité de manières. Par exemple, toutes les fractions

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \text{ etc.},$$

dont le dénominateur contient deux fois le numérateur, expriment, sous des formes différentes, la moitié de l'unité; les fractions

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \text{ etc.},$$

dont le dénominateur contient 3 fois le numérateur, représentent toutes le tiers de l'unité. Mais parmi toutes les formes que prend, dans l'un et l'autre exemple, la fraction proposée, la première est la plus remarquable, comme

Digitized by Google

étant la plus simple; et il est, par conséquent, bon de savoir la retrouver dans chacune des autres; or c'est à quoi l'on parvient en divisant les deux termes de celles-ci par le même nombre, ce qui, comme on l'a vu, n'en change pas la valeur. En effet, si l'on divise par 7 les deux termes de la fraction $\frac{7}{14}$, on retombera sur $\frac{1}{2}$, et faisant aussi la même opération sur la fraction $\frac{7}{21}$, on en déduira $\frac{1}{3}$.

59. C'est en suivant ce dernier procédé qu'on réduit une fraction à sa *plus simple expression*. Il ne saurait s'appliquer qu'aux fractions dont le numérateur et le dénominateur se trouvent divisibles par le même nombre; et, dans tous les autres cas, la fraction proposée est la plus simple de toutes celles qui peuvent représenter la quantité qu'elle exprime.

Ainsi les fractions

$$\frac{5}{7}, \frac{7}{12}, \frac{15}{16},$$

dont les termes ne peuvent être divisés par un même nombre, ou n'ont aucun diviseur commun, sont *irréductibles;* et l'on ne saurait, par conséquent, exprimer d'une manière plus simple les grandeurs qu'elles représentent: c'est ce qui sera prouvé en Algèbre.

60. Il suit de là que, pour simplifier une fraction, il faut essayer de diviser ses deux termes par quelques-uns des nombres 2, 3, etc.; mais, par ce tâtonnement, on n'arrivera pas toujours à la plus simple expression de la fraction proposée, ou au moins il faudra souvent effectuer un grand nombre d'opérations.

Si l'on avait, par exemple, la fraction $\frac{24}{84}$, on pourrait remarquer d'abord que chacun de ses termes est un multiple de 2, et en les divisant par ce nombre, on obtiendrait $\frac{12}{42}$; divisant ensuite par 2 les deux termes de cette dernière, on en déduirait $\frac{6}{21}$.

Quoique déjà beaucoup plus simple que la proposée,

Digitized by Google

cette fraction est encore susceptible de réduction; car on peut diviser ses deux termes par 3, et l'on obtient alors $\frac{2}{7}$.

Si l'on fait attention que diviser un nombre par 2, puis diviser le quotient par 2, puis encore ce nouveau quotient par 3, c'est la même chose que de diviser d'abord le nombre primitif par le produit des nombres 2, 2 et 3, ce qui revient à 12, on verra que les trois opérations ci-dessus peuvent s'effectuer en une seule fois, en divisant les deux termes de la fraction proposée par 12, et l'on aura encore $\frac{2}{7}$.

Les nombres 2, 3, 4 et 12 divisant, chacun en même temps, les deux nombres 24 et 84, sont les diviseurs communs de ces nombres; mais 12 se distingue des autres parce qu'il est plus grand, et c'est en employant ce *plus grand commun diviseur* des deux termes de la fraction proposée, qu'on la réduit tout d'un coup à sa plus simple expression. C'est donc une recherche utile que celle-ci : *Deux nombres étant donnés, trouver leur plus grand commun diviseur.*

61. On arrive à la connaissance du commun diviseur de deux nombres par une espèce de tâtonnement facile à découvrir, et qui a l'avantage d'approcher du but à chaque essai qu'on fait. Pour l'expliquer clairement, je vais prendre un exemple.

Soient les deux nombres 637 et 143; le plus grand diviseur commun à ces nombres ne saurait évidemment surpasser le plus petit des deux : il convient donc d'essayer si le nombre 143, qui se divise lui-même, et donne pour quotient 1, peut diviser aussi le nombre 637, auquel cas il serait lui-même le plus grand diviseur commun cherché. Mais, dans l'exemple proposé, cela n'arrive pas, et l'on trouve un quotient 4 et un reste 65.

Maintenant, il est visible que tout diviseur commun aux deux nombres 637 et 143 doit diviser aussi le reste 65 de leur division; car le plus grand, 637, est égal au plus

Digitized by Google

petit, 143, multiplié par le quotient 4, plus le reste 65 (50). Or, en divisant 637 par le diviseur commun cherché, on aura un quotient exact : il faut donc qu'on en ait aussi un semblable, en divisant par le même diviseur chacune des parties dans lesquelles 637 est décomposé, et en réunissant les résultats. Mais le produit de 143 par 4 se divise nécessairement par le diviseur commun, qui est facteur de 143 : il faut donc que l'autre partie, 65, se divise aussi par ce diviseur, sans quoi le quotient total serait un entier accompagné d'une fraction, et ne pourrait, par conséquent, égaler le nombre entier résultant de la division de 637 par le commun diviseur.

Réciproquement, tout diviseur commun à 65 et à 143 divisera 637, composé de 4 fois 143 et de 65.

Par le même raisonnement, on prouvera, en général, que *tout diviseur commun à deux nombres doit diviser le reste de la division du plus grand des deux par le plus petit, et que tout diviseur commun à ce plus petit nombre, et au reste, doit diviser le plus grand.*

D'après ces principes, on voit que le plus grand commun diviseur des nombres 637 et 143 doit l'être aussi des nombres 143 et 65, et que celui de ces derniers doit l'être de 637 et de 143; mais 65 ne pouvant être divisé par un nombre plus grand que lui-même, il faut donc l'essayer d'abord. En divisant 143 par 65, on trouve un quotient 2 et un reste 13 : 65 n'est donc pas le diviseur cherché. Par un raisonnement semblable à celui qu'on a fait à l'égard des nombres 637, 143 et du reste 65 de leur division, on verra que le plus grand diviseur commun de 143 et de 65 doit l'être aussi des nombres 65 et 13; or le plus grand diviseur commun de ces derniers ne saurait surpasser 13 : il faut donc essayer si 13 divise 65, ce qui arrive, puisqu'on a pour quotient 5.

Donc 13 est le plus grand diviseur commun cherché, puisque étant le plus grand diviseur commun de lui-

Digitized by Google

même et de 65, il doit l'être de 65 et de 143, et que l'étant de ces nombres, il doit l'être de 143 et de 637.

Il est commode dans la pratique de placer les divisions successives à la suite les unes des autres, et de disposer l'opération comme on le voit ci-après,

637	143	65	13
	4	2	5
65	13	0	

en séparant les quotients 4, 2, 5, des restes placés au-dessous.

Les raisonnements employés dans l'exemple précédent, pouvant s'appliquer à des nombres quelconques, conduisent à cette règle générale : *On trouvera le plus grand commun diviseur de deux nombres, en divisant le plus grand de ces nombres par le plus petit, divisant ensuite le plus petit par le reste de la première division, puis divisant ce reste par celui de la seconde division, puis divisant ce second reste par le troisième reste ou celui de la troisième division, et continuant ainsi de diviser le reste de chaque opération par celui de la suivante, jusqu'à ce qu'on parvienne à un quotient exact : le dernier diviseur sera le plus grand commun diviseur demandé.*

62. Voici deux exemples de cette opération :

9024	3760	1504	752
1504	2	2	2
	752	0000	

752 est donc le plus grand diviseur commun entre 9024 et 3760.

937	47	44	3	2	1
467	19	1	14	1	2
44	3	14	1	0	
		2			

Digitized by Google

On voit, par cette dernière opération, que le plus grand diviseur commun entre 937 et 47 est seulement 1 ; c'est-à-dire qu'à proprement parler, ces deux nombres n'ont point de diviseur commun, puisque tous les nombres entiers, quels qu'ils soient, sont divisibles par 1.

Il n'est pas difficile de se convaincre que la règle du numéro précédent doit nécessairement conduire à ce résultat, toutes les fois que les nombres proposés n'auront pas de diviseur commun, car les restes étant toujours moindres que le diviseur deviennent de plus en plus petits à chaque opération ; et il est évident que les divisions se continueront tant qu'on aura un diviseur plus grand que l'unité.

63. D'après ces calculs, les fractions $\frac{143}{637}$, $\frac{8760}{9024}$ se réduisent sur-le-champ à leur plus simple expression, en divisant les deux termes de la première par leur diviseur commun 13, et ceux de la seconde par leur diviseur commun 752 : on obtient ainsi $\frac{11}{49}$, $\frac{5}{12}$. Quant à la fraction $\frac{47}{937}$, elle est absolument irréductible, puisque ses deux termes n'ont d'autre diviseur commun que l'unité.

64. Il n'est pas toujours nécessaire de tenter la recherche du plus grand diviseur commun des deux termes de la fraction proposée : il y a, ainsi que je l'ai fait remarquer plus haut, des réductions qui s'offrent d'elles-mêmes.

Tout nombre terminé par un des chiffres 0, 2, 4, 6, 8 est nécessairement divisible par 2 ; car, puisqu'en divisant un nombre quelconque par 2, il ne peut rester que 1 sur les dizaines, la dernière division partielle s'effectuera sur les nombres 0, 2, 4, 6, 8, si les dizaines n'ont point laissé de reste, ou sur les nombres 10, 12, 14, 16, 18, si elles en ont laissé, et tous ces nombres sont divisibles par 2.

Les nombres divisibles par 2 se nomment *nombres pairs*, parce qu'ils peuvent être partagés en deux parties pareilles.

Digitized by Google

De même, tout nombre terminé par un zéro ou par un 5 est divisible par 5; car, lorsqu'on sera arrivé à la division des dizaines par 5, le reste, s'il y en a un, sera nécessairement 1, 2, 3 ou 4 dizaines; en sorte que si le dernier chiffre est un 0 ou un 5, l'opération se terminera sur un des nombres 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, tous divisibles par 5.

Les nombres 10, 100, 1000, etc., exprimés par l'unité suivie d'un certain nombre de zéros, peuvent être décomposés en 9 plus 1, 99 plus 1, 999 plus 1, et ainsi de suite; et les nombres 9, 99, 999, etc., étant divisibles par 3 et par 9, il suit de là que si l'on divise par 3 ou par 9 les nombres de la forme 10, 100, 1000, etc., le reste de la division sera 1.

Maintenant tout nombre qui, comme 20, 300, 5000, est exprimé par un seul chiffre significatif suivi d'un certain nombre de zéros, peut être décomposé en plusieurs nombres exprimés par l'unité suivie du même nombre de zéros : 20 est égal à 10 plus 10, 300 à 100 plus 100 plus 100, 5000 à 1000 plus 1000 plus 1000 plus 1000 plus 1000, et ainsi des autres. Il suit de là que si l'on divise 20, ou 10 plus 10, par 3 ou par 9, le reste sera 1 plus 1, ou 2; si l'on divise 300, ou 100 plus 100 plus 100, par 3 ou par 9, le reste sera 1 plus 1 plus 1, ou 3.

En général, si l'on décompose de la même manière un nombre exprimé par un seul chiffre significatif suivi d'un certain nombre de zéros, pour le diviser par 3 ou par 9, le reste de cette division sera égal à autant de fois 1 qu'il y a d'unités dans le chiffre significatif, c'est-à-dire au chiffre significatif lui-même. Or un nombre quelconque étant décomposé en unités, dizaines, centaines se trouve formé par la réunion de plusieurs nombres exprimés par un seul chiffre significatif; et si l'on divise chacun de ces derniers par 3 ou par 9, on aura pour reste un des chiffres significatifs du nombre proposé : par exemple, la division

Digitized by Google

des centaines donnera pour reste le chiffre des centaines; celle des dizaines, celui des dizaines, et ainsi des autres. Si donc la somme de tous ces restes était divisible par 3 ou par 9, la division du nombre proposé s'achèverait exactement; d'où il suit que si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, ou par 9, il en sera de même de ce nombre.

Ainsi les nombres 102, 4251, 15342 sont divisibles par 3, parce que la somme des chiffres significatifs est 3 dans le premier, 12 dans le deuxième et 15 dans le troisième.

De même, 612, 8280, 934218 sont divisibles par 9, parce que la somme des chiffres significatifs est 9 dans le premier, 18 dans le deuxième et 27 dans le troisième.

On observera que tout nombre divisible par 9 est par là même divisible par 3, quoique tout nombre divisible par 3 ne le soit pas par 9.

On pourrait faire encore sur plusieurs autres nombres des observations analogues à celles que je viens d'exposer sur 2, 3, 5 et 9; mais la recherche de ces propriétés m'écarterait trop de mon sujet pour m'y arrêter.

Les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., qu'on ne peut diviser que par eux-mêmes, ou par l'unité, s'appellent *nombres premiers*. Deux nombres, comme 12 et 35, ayant, chacun en particulier, des diviseurs, mais dont aucun n'est commun à l'un et à l'autre, sont dits *premiers entre eux* (1).

Une fraction irréductible a, par conséquent, pour numérateur et pour dénominateur, des nombres premiers entre eux.

65. L'addition et la soustraction n'ont aucune difficulté, quand les fractions sur lesquelles on doit effectuer

(1) On trouvera au n° 162 comment il faut s'y prendre pour décomposer un nombre dans ses facteurs simples ou *premiers*.

Digitized by Google

ces dernières opérations ont le même dénominateur; comme elles ne renferment que des parties de même dénomination, et, par conséquent, de même grandeur, on peut les ajouter ou les soustraire de même que si c'étaient des unités, en observant de marquer au résultat la dénomination des parties dont il est composé.

Il est évident, en effet, que $\frac{2}{11}$ et $\frac{3}{11}$ font $\frac{5}{11}$, comme 2 quantités et 3 quantités de la même espèce en font 5 de cette espèce, quelle qu'elle soit.

De même la différence entre $\frac{3}{9}$ et $\frac{8}{9}$ est $\frac{5}{9}$, comme la différence entre 3 quantités et 8 quantités de même espèce est 5 quantités de cette espèce, quelle qu'elle soit.

On doit conclure de là que, *pour ajouter ou soustraire des fractions de même dénominateur, il faut prendre la somme ou la différence de leurs numérateurs, et donner au résultat le dénominateur commun.*

66. L'addition des fractions conduit souvent à des résultats qui surpassent l'unité. Si l'on ajoutait, par exemple, $\frac{4}{8}$ et $\frac{7}{8}$, la somme serait $\frac{11}{8}$: cette expression, désignant 11 parties, dont 8 réunies composent l'unité, équivaut à l'unité, plus trois huitièmes d'unité, ou à $1\frac{3}{8}$.

En général, toute expression fractionnaire dont le numérateur surpasse le dénominateur contient des unités ou *des entiers;* et *l'on extrait les entiers en divisant le numérateur par le dénominateur: le quotient donne leur nombre, et le reste mis en fraction est celle qui doit les accompagner.*

L'expression $\frac{307}{53}$, par exemple, désignant 307 parties dont 53 composent l'unité, il y a, dans la quantité que représente cette expression, autant d'unités que 307 contient de fois 53 : faisant la division, on obtient 5 pour quotient et 42 pour reste. Ces 42 sont des *cinquante-troisièmes* d'unité : ainsi, au lieu de $\frac{307}{53}$, on peut écrire $5\frac{42}{53}$.

67. L'expression $5\frac{42}{53}$, dans laquelle les entiers sont en

Digitized by Google

évidence, étant composées de deux parties différentes, il est souvent utile de revenir à l'expression primitive $\frac{307}{53}$: c'est ce qu'on appelle *réduire un entier en fraction.*

Pour y parvenir, *il faut multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne, ajouter son numérateur au résultat, et donner à la somme le dénominateur de la même fraction.*

En effet, il faut d'abord convertir les cinq entiers en cinquante-troisièmes, ce qui s'effectuera en multipliant 53 par 5, puisque chaque unité doit contenir cinquante-trois parties; le résultat sera $\frac{265}{53}$. Réunissant cette partie avec la seconde, $\frac{42}{53}$, il viendra $\frac{307}{53}$.

68. Quand les fractions proposées ont des dénominateurs différents, on ne peut plus réunir ensemble ou retrancher l'un de l'autre les nombres de parties dont elles sont composées, puisque ces parties sont de grandeurs différentes; et, pour obvier à cet inconvénient, on fait subir à ces fractions une transformation qui les ramène à des parties de même grandeur, en leur donnant un dénominateur commun.

Soient, par exemple, les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$. Si l'on multiplie par 5, dénominateur de la seconde, les deux termes de la première, on convertira cette première en $\frac{10}{15}$; multipliant ensuite par 3, dénominateur de la première, les deux termes de la seconde, on convertira cette seconde en $\frac{12}{15}$: on formera ainsi deux nouvelles expressions qui auront la même valeur que les fractions proposées (56).

Cette opération, nécessaire pour comparer les grandeurs respectives de deux fractions, ne consiste, au fond, qu'à trouver, pour les exprimer, des parties de l'unité assez petites pour pouvoir être contenues exactement dans chacune de celles dont se forment les fractions proposées. Il est visible, dans l'exemple ci-dessus, que la quinzième partie de l'unité peut mesurer exactement $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{5}$ de cette

Digitized by Google

unité, puisque $\frac{1}{3}$ contient 5 quinzièmes, et que $\frac{1}{5}$ en contient 3. Le procédé appliqué aux fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ réussirait également sur d'autres quelconques.

En général, *pour réduire au même dénominateur deux fractions quelconques, il faut multiplier les deux termes de chacune par le dénominateur de l'autre.*

69. *On réduit à la fois au même dénominateur un nombre quelconque de fractions, en multipliant les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres;* car il est évident que les nouveaux dénominateurs sont les mêmes, puisque chacun est formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, et que les nouvelles fractions sont de même valeur que les premières, puisqu'on n'a fait que multiplier les deux termes de celles-ci par un même nombre (56).

La règle précédente conduit, dans tous les cas, au but qu'on s'est proposé; mais lorsque les dénominateurs des fractions dont il s'agit ne sont pas premiers entre eux, il existe un dénominateur commun plus simple que celui qu'elle donne, et l'on y parvient par des considérations analogues à celles des numéros précédents. Si l'on a, par exemple, les fractions

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8},$$

comme s'il ne s'agit, pour les réduire au même dénominateur, que de diviser l'unité en parties qui soient contenues exactement dans celles dont ces fractions se forment, il suffira de trouver le plus petit nombre qui puisse se diviser exactement par chacun de leurs dénominateurs 3, 4, 6, 8; et on le découvrira en essayant sur les multiples de 3 les divisions par 4, 6 et 8, qui ne réussissent en premier lieu que sur 24 : cela fait, il n'y aura plus qu'à convertir les fractions proposées en 24es de l'unité.

Pour effectuer cette opération, on cherchera successivement combien de fois les dénominateurs 3, 4, 6 et 8

Digitized by Google

sont contenus dans 24; et les quotients seront les nombres par lesquels il faudra multiplier respectivement les deux termes de chaque fraction, pour la ramener au dénominateur 24. On trouvera ainsi que les termes de $\frac{2}{3}$ doivent être multipliés par 8, ceux de $\frac{3}{4}$ par 6, ceux de $\frac{5}{6}$ par 4, ceux de $\frac{7}{8}$ par 3, et l'on formera les fractions

$$\frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}.$$

On verra dans l'Algèbre des moyens pour faciliter l'application de ce procédé.

70. La règle donnée précédemment pour la réduction des fractions au même dénominateur suppose qu'un produit résultant des multiplications successives de plusieurs nombres entre eux ne change point, dans quelque ordre qu'on effectue ces multiplications. Cette vérité, qu'on regarde presque toujours comme évidente, a cependant besoin d'être démontrée.

Il faut commencer par prouver que multiplier un nombre par le produit de deux autres, c'est la même chose que de le multiplier d'abord par l'un d'eux, et de multiplier ensuite le produit résultant par l'autre. Au lieu de multiplier, par exemple, 3 par 35, produit des nombres 5 et 7, on aurait pu multiplier 3 par 5, et multiplier ensuite le produit de ces nombres par 7. La proposition serait évidente si, à la place du nombre 3, on prenait l'unité; car 1 multiplié par 5 donne 5, et le produit de 5 par 7 donne 35, aussi bien que le produit de 1 par 35. Mais 3, ou tout autre nombre, n'étant que l'assemblage de plusieurs unités, il n'arrivera à ce nombre que ce qui arrive à chacune des unités dont il est composé; c'est-à-dire que les produits de 3 par 5 et par 7, obtenus de l'une et de l'autre manière, étant, dans les deux cas, le triple des résultats que donne l'unité multipliée par 5 et par 7, seront nécessairement les mêmes. On prouverait de la même manière que si l'on avait à multiplier 3 par le pro-

Digitized by Google

duit des nombres 5, 7 et 9, cela reviendrait à multiplier 3 par 5, puis le produit trouvé, par 7, et ce dernier produit, par 9; et ainsi de suite, en quelque nombre que soient les facteurs.

Pour indiquer d'une manière abrégée plusieurs multiplications successives, telles que celles des nombres 3, 5 et 7 entre eux, j'écrirai 3 par 5 par 7.

Cela posé, dans le produit 3 par 5 on peut changer l'ordre des facteurs 3 et 5 (27), et l'on aura encore le même produit. Il suit immédiatement de là que 5 par 3 par 7 est la même chose que 3 par 5 par 7.

On peut aussi changer l'ordre des facteurs 3 et 7 dans le produit 5 par 3 par 7, puisque ce produit équivaut à 5 multiplié par le produit des nombres 3 et 7 : on aura donc encore, dans 5 par 7 par 3, le même produit que les précédents.

En rapprochant les trois arrangements,

3 par 5 par 7,
5 par 3 par 7,
5 par 7 par 3,

on voit que le facteur 3 s'est trouvé successivement le premier, le second et le troisième, et qu'il pourrait en être de même de l'un quelconque des deux autres. Cet exemple, dans lequel on n'a point considéré la valeur particulière de chaque nombre, doit prouver qu'un produit de trois facteurs ne change point, quelque ordre qu'on établisse dans les multiplications.

Si l'on avait un produit de quatre facteurs, tel que 3 par 5 par 7 par 9, on pourrait, d'après ce qui vient d'être dit, arranger comme on voudrait les trois premiers ou les trois derniers, et faire ainsi passer par toutes les places l'un quelconque de ces facteurs. Considérant ensuite un des nouveaux arrangements, par exemple celui-ci, 5 par 7 par 3 par 9, on pourrait intervertir l'ordre des deux

Digitized by Google

derniers facteurs, ce qui donnerait 5 par 7 par 9 par 3, et mettrait 3 à la dernière place. On étendra sans peine ces raisonnements à tel nombre de facteurs qu'on voudra.

71. Au moyen de la réduction au même dénominateur, l'addition et la soustraction des fractions s'effectuent comme dans le n° 65.

72. Lorsqu'on a des entiers accompagnés de fractions, il faut d'abord opérer sur celles-ci. Pour ajouter, par exemple, $3\frac{2}{7}$ avec $5\frac{4}{9}$, on commencera par réduire au même dénominateur les fractions $\frac{2}{7}$ et $\frac{4}{9}$, qui deviendront $\frac{18}{63}$ et $\frac{28}{63}$; puis on joindra leur somme à celle des entiers 3 et 5; le total sera $8\frac{46}{63}$.

La soustraction s'opérera de même toutes les fois que la fraction qui entre dans le nombre à soustraire sera la plus petite des deux. Dans le cas contraire, pour rendre la soustraction possible, il faut faire un emprunt sur l'entier joint à la plus petite fraction. Si l'on avait, par exemple, $\frac{4}{5}$ à ôter de $3\frac{1}{4}$, les deux fractions réduites au même dénominateur devenant $\frac{16}{20}$ et $\frac{5}{20}$, on verrait que la première ne peut être retranchée de la seconde; mais en empruntant 1, ou $\frac{20}{20}$, sur l'entier 3, on changerait le nombre $3\frac{1}{4}$, ou $3\frac{5}{20}$, en $2\frac{25}{20}$, d'où, retranchant $\frac{16}{20}$, il resterait $2\frac{9}{20}$.

73. Je reprends maintenant l'examen du tableau du n° 55:

En multipliant En divisant	le numérateur,	on multiplie on divise	la fraction,
En multipliant En divisant	le dénominateur,	on divise on multiplie	la fraction,

pour en déduire de nouvelles conséquences.

On voit d'abord, à la seule inspection de ce tableau, que l'on peut multiplier une fraction de deux manières, savoir : en multipliant son numérateur, ou en divisant son dénominateur, et qu'on peut aussi la diviser de deux ma-

Digitized by Google

nières, savoir : en divisant son numérateur, ou en multipliant son dénominateur. D'où il suit que la multiplication seule, selon qu'on l'effectue sur le numérateur ou sur le dénominateur, suffit pour opérer la multiplication et la division des fractions par des nombres entiers. Ainsi $\frac{3}{15}$ multipliés par 7 unités font $\frac{21}{15}$; $\frac{4}{9}$ divisés par 3 font $\frac{4}{27}$, etc.

74. Dans le numéro précédent, le multiplicateur, étant un nombre entier, indiquait encore, comme dans le n° 22, combien de fois on devait répéter le multiplicande; mais, quand on dit, par exemple, que prendre le 5e d'un nombre quelconque, c'est multiplier ce nombre par $\frac{1}{5}$, le mot *multiplier* n'a plus la même acception que ci-dessus, puisqu'il indique un résultat cinq fois plus petit que le multiplicande. Néanmoins on peut comprendre les deux cas dans le même énoncé, en disant que *multiplier un nombre par un autre, c'est composer avec le premier un nombre, de la même manière que le second est composé avec l'unité*. En effet, lorsqu'il s'agit de multiplier par 2, par 3, etc., le produit est composé de 2 fois, 3 fois, etc., le multiplicande, de même que le multiplicateur est composé de 2, 3, etc., unités; et multiplier un nombre quelconque par la fraction $\frac{1}{5}$ par exemple, c'est en prendre la cinquième partie, parce que le multiplicateur $\frac{1}{5}$, étant la cinquième partie de l'unité, exprime que le produit doit être la cinquième partie du multiplicande (1).

De même, multiplier un nombre quelconque par $\frac{4}{5}$, c'est prendre sur ce multiplicande une partie qui en soit les quatre cinquièmes, ou égale à quatre fois un cinquième de ce multiplicande.

---

(1) On est conduit à cet énoncé par une question qui se présente souvent : celle où l'on cherche le prix d'une quantité quelconque d'une chose, lorsqu'on connaît le prix de l'unité de cette chose. La question demeure évidemment la même, soit qu'il s'agisse d'une quantité plus grande ou plus petite que cette unité.

Digitized by Google

On voit par là que le mot *multiplier*, étendu aux expressions fractionnaires, n'emporte pas toujours l'idée d'augmentation, comme pour les nombres entiers. Toutes les fois que le multiplicateur sera moindre que l'unité, le produit sera plus petit que le multiplicande, auquel il serait seulement égal, si le multiplicateur était 1.

75. Puisque *la multiplication par une fraction, quel que soit le multiplicande, a pour objet de prendre sur ce multiplicande les parties marquées par la fraction multiplicateur*, cette opération est composée de deux autres, savoir, d'une division et d'une multiplication, dans lesquelles le diviseur et le multiplicateur sont des nombres entiers.

En effet, pour prendre les $\frac{4}{5}$ d'un nombre quelconque par exemple, il faut d'abord en trouver la cinquième partie en le divisant par 5, et répéter cette cinquième partie quatre fois en la multipliant par 4.

En général, on voit qu'*il faudra toujours diviser le multiplicande par le dénominateur de la fraction multiplicateur, et multiplier le résultat par le numérateur de cette fraction*.

Si le multiplicande est un nombre entier divisible par 5, par exemple 35, la cinquième partie sera 7; multipliant ce résultat par 4, on aura 28 pour les $\frac{4}{5}$ de 35, ou pour le produit de 35 par $\frac{4}{5}$. Si le multiplicande, toujours entier, n'est pas divisible exactement par 5, qu'il soit, par exemple, 32, la division par 5 donnera pour quotient $6\frac{2}{5}$; répétant ce quotient quatre fois, on trouvera $24\frac{8}{5}$, ce qui revient à $25\frac{3}{5}$: telle est la valeur des $\frac{4}{5}$ de 32.

On aurait évité la conversion de $24\frac{8}{5}$ en $25\frac{3}{5}$, si l'on eût commencé par multiplier 32 par le numérateur 4; divisant alors le produit 128 par le dénominateur 5, on aurait obtenu tout de suite le dernier résultat $25\frac{3}{5}$.

Digitized by Google

76. Je passe maintenant à la multiplication d'une fraction par une fraction.

Je suppose qu'on ait à multiplier, par exemple, $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$. D'après le numéro précédent, l'opération se réduit à diviser $\frac{2}{3}$ par 5, et à multiplier ensuite le résultat par 4; et par le tableau du n° 55, la première opération s'effectuera en multipliant le dénominateur 3 du multiplicande par 5, et la seconde, en multipliant le numérateur 2 du multiplicande par 4, ce qui donnera pour le produit cherché $\frac{8}{15}$.

Il en serait de même de tout autre exemple; et l'on doit, par conséquent, conclure de ce qui précède, que, *pour former le produit de deux fractions, il faut multiplier les numérateurs l'un par l'autre, et placer sous ce produit celui des deux dénominateurs.*

77. Il peut arriver que l'on ait à multiplier les uns par les autres des entiers joints à des fractions, comme, par exemple, $3\frac{5}{7}$ par $4\frac{8}{9}$. Le moyen le plus simple pour obtenir le produit, est de réduire les entiers en fractions, suivant le procédé du n° 67 : les deux facteurs seront exprimés alors par $\frac{26}{7}$, $\frac{41}{9}$; leur produit, par $\frac{1144}{63}$, ou par $18\frac{10}{63}$, en extrayant les entiers (66).

78. On donne quelquefois au produit de plusieurs fractions le nom de *fractions de fractions :* c'est dans ce sens qu'on dit *les* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{4}{5}$. Cette expression marque les $\frac{2}{3}$ de la quantité représentée par $\frac{4}{5}$ de l'unité primitive, et prise à son tour pour une unité. On réduit ces deux fractions à une seule par la multiplication (76), et le résultat $\frac{8}{15}$ exprime la valeur de la quantité cherchée rapportée à l'unité primitive; c'est-à-dire que les $\frac{2}{3}$ de la quantité représentée par les $\frac{4}{5}$ de l'unité équivalent aux $\frac{8}{15}$ de cette unité. Si l'on voulait prendre les $\frac{7}{9}$ de ce résultat, cela reviendrait à prendre les $\frac{7}{9}$ des $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$; et en réduisant ces fractions en une seule, on aurait $\frac{56}{135}$ pour la valeur de la quantité cherchée, rapportée à l'unité primitive.

Digitized by Google

79. Le mot *contenir* ne convient pas plus, en toute rigueur, aux différents cas que présente la division, que le mot *répéter* à ceux que présente la multiplication; car on ne peut pas dire que le dividende contient le diviseur, lorsqu'il est moindre que ce dernier : cependant on s'exprime encore ainsi, mais seulement par analogie et par extension.

Pour généraliser la division, *il faut regarder le dividende comme composé avec le quotient de la même manière que le diviseur l'est avec l'unité*, puisque le diviseur et le quotient sont les deux facteurs du dividende (36). Cette considération se prête à tous les cas que peut offrir la division. En effet, lorsque le diviseur est 5 par exemple, le dividende est égal à 5 fois le quotient, et celui-ci est, par conséquent, la cinquième partie du dividende. Si le diviseur est une fraction, $\frac{1}{2}$ par exemple, le dividende ne doit être que la moitié du quotient, ou ce dernier doit être double de l'autre.

Il est visible que toutes les fois que le diviseur sera moindre que l'unité, le quotient surpassera le dividende, puisque ce diviseur doit être contenu dans le dividende un plus grand nombre de fois que l'unité, qui, prise pour diviseur, donne, dans tous les cas, un quotient exprimé par le dividende lui-même.

La définition que je viens de poser conduit facilement à la manière d'opérer, lorsque le diviseur est une fraction. Je prends pour exemple $\frac{4}{5}$: dans ce cas, le dividende doit être seulement les $\frac{4}{5}$ du quotient; mais $\frac{1}{5}$ étant $\frac{1}{4}$ de $\frac{4}{5}$, on aurait donc $\frac{1}{5}$ du quotient en prenant le quart du dividende, ou en le divisant par 4. Connaissant par là $\frac{1}{5}$ du quotient, il n'y aurait qu'à prendre ce résultat 5 fois, ou le multiplier par 5, pour obtenir le quotient. Dans cette opération, on divise le dividende par 4, et l'on multiplie le résultat par 5 : c'est donc (75) comme si l'on avait pris les $\frac{5}{4}$ du dividende, ou comme si l'on avait multiplié le

Digitized by Google

dividende par $\frac{5}{4}$, qui n'est autre chose que la fraction diviseur $\frac{4}{5}$ renversée.

Cet exemple montre qu'en général, *pour diviser un nombre quelconque par une fraction, il faut le multiplier par cette fraction renversée.*

Soit, par exemple, 9 à diviser par $\frac{3}{4}$; cela s'effectuera en multipliant 9 par $\frac{4}{3}$, et l'on trouvera $\frac{36}{3}$ ou 12. De même, 13 à diviser par $\frac{5}{7}$ reviendra à 13 multiplié par $\frac{7}{5}$ ou à $\frac{91}{5}$. En extrayant les entiers (66), le quotient cherché sera $18\frac{1}{5}$.

80. Lorsque le dividende est une fraction, l'opération revient à *multiplier* (76) *la fraction dividende par la fraction diviseur renversée.*

Soit $\frac{7}{8}$ à diviser par $\frac{2}{3}$; il faudra multiplier $\frac{7}{8}$ par $\frac{3}{2}$, ce qui donnera $\frac{21}{16}$.

Il est évident que l'opération ci-dessus peut encore être énoncée ainsi : *Pour diviser une fraction par une autre, il faut multiplier le numérateur de la première par le dénominateur de la seconde, et le dénominateur de la première par le numérateur de la seconde.*

S'il y avait des entiers joints aux fractions proposées, on les réduirait en fractions, et l'on appliquerait aux résultats la règle ci-dessus.

81. Il est important d'observer que l'on indique, par le moyen d'une expression fractionnaire, une division quelconque, soit qu'elle puisse s'opérer en nombres entiers ou autrement. $\frac{36}{3}$, par exemple, expriment évidemment le quotient de 36 par 3 aussi bien que 12; car $\frac{1}{3}$ étant contenu trois fois dans l'unité, $\frac{36}{3}$ seront contenus trois fois dans 36 entiers, comme doit l'être le quotient de 36 par 3.

82. On remarquera sans doute que la multiplication et la division des fractions s'opèrent immédiatement par les remarques énoncées dans le tableau de la page 40, au

Digitized by Google

lieu que l'addition et la soustraction des fractions demandent une préparation préliminaire. Cela tient à ce que les fractions proviennent de la division, qui tient de si près à la multiplication. On aura souvent occasion, par la suite, de se convaincre de cette vérité, que les opérations à faire sur des quantités sont d'autant plus faciles, qu'elles se rapprochent davantage de l'origine de ces quantités.

Des Fractions décimales.

83. Quoiqu'on puisse, par les règles précédentes, effectuer dans tous les cas, sur les fractions, les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, on a dû sentir de bonne heure que, si l'on avait assujetti à une même loi de décroissement les diverses subdivisions de l'unité, qui servent à mesurer les quantités plus petites que cette unité, le calcul des fractions serait devenu beaucoup plus commode par la facilité qu'on aurait eue à les convertir les unes dans les autres. En prenant cette loi conforme à la base de notre système de numération, on a donné au calcul le plus haut degré de simplicité auquel il soit possible d'atteindre, et voici comment.

On a vu, dans le n° 3, que chacune des collections d'unités contenues dans un nombre se compose de dix unités de l'ordre précédent, comme la dizaine se forme des unités simples; mais rien ne s'oppose à ce qu'on regarde cette unité simple comme contenant dix parties dont chacune sera un *dixième;*

Le dixième, comme contenant dix parties, dont chacune sera un *centième* de l'unité;

Le centième, comme contenant dix parties, dont chacune sera un *millième* de l'unité, et ainsi de suite.

En poursuivant ainsi, on formera des quantités aussi petites que l'on voudra, et au moyen desquelles on pourra, par conséquent, mesurer des quantités quelque petites qu'elles soient.

Digitized by Google

Ces fractions, qu'on nomme *décimales*, parce qu'elles sont composées de parties de l'unité de dix en dix fois plus petites, se convertissent les unes dans les autres, de la même manière que les *dizaines*, les *centaines*, les *mille*, etc., se convertissent en unités. En effet,

l'unité valant 10 dixièmes,
le dixième 10 centièmes,
le centième 10 millièmes,

il en résulte que le dixième vaut 10 fois 10 millièmes ou 100 millièmes.

Par exemple, 2 dixièmes 3 centièmes et 4 millièmes seront équivalents à 234 millièmes, comme 2 centaines 3 dizaines et 4 unités font 234 unités; il en sera de même dans tout autre cas, puisque la subordination des parties de l'unité est semblable à celle des divers ordres d'unités.

84. Par cette remarque, on peut, au moyen des chiffres, écrire les fractions décimales de la même manière que les nombres entiers, puisque, d'après la convention qui rend dix fois plus petite la valeur d'un chiffre mis à la droite d'un autre, les *dixièmes* trouvent naturellement leur place à la droite des unités, puis les *centièmes* à la droite des dixièmes, et ainsi de suite; mais, pour empêcher que l'on ne puisse confondre les chiffres qui expriment des parties décimales avec ceux qui représentent des unités entières, on met une virgule à la droite des unités. Pour exprimer, par exemple, 34 unités et 27 centièmes, on écrira 34,27. S'il n'y avait pas d'unités, on remplirait leur place par un zéro, et l'on ferait de même pour toutes les parties décimales qui pourraient manquer entre celles qui sont énoncées dans le nombre proposé.

Ainsi, 19 centièmes s'écrivent 0,19,

304 millièmes, 0,304,
3 millièmes, 0,003.

Digitized by Google

85. Si l'on rapproche les expressions des fractions décimales ci-dessus des suivantes, $\frac{19}{100}$, $\frac{304}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, qu'on tirerait de la manière de représenter, en général, une fraction, on verra que, *pour représenter sous la forme entière une fraction décimale écrite comme une fraction ordinaire, il faut prendre tel qu'il est le numérateur de cette fraction, et le placer de manière qu'il y ait après la virgule autant de chiffres qu'il y a de zéros à la suite de l'unité dans le dénominateur.*

Réciproquement, *pour ramener une fraction décimale, présentée sous la forme d'un entier, à celle d'une fraction ordinaire, il faut donner pour dénominateur aux chiffres qu'elle contient l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres à la droite de la virgule.*

C'est ainsi que les fractions 0,56, 0,036 se changent en $\frac{56}{100}$ et $\frac{36}{1000}$.

86. *L'expression en chiffres des nombres contenant des parties décimales se lit en énonçant d'abord les chiffres placés à la gauche de la virgule, puis ceux qui sont à la droite, et en ajoutant au dernier de ceux-ci la dénomination des parties qu'il représente.*

Le nombre 26,736 s'énonce 26 unités 736 millièmes;
Le nombre 0,0673 s'énonce 673 dix-millièmes;
Enfin 0,0000673 s'énonce 673 dix-millionièmes.

87. Les chiffres décimaux ne tirant leur valeur que du rang qu'ils occupent par rapport à la virgule, il est indifférent d'écrire ou d'effacer sur leur droite tel nombre de zéros qu'on voudra. Par exemple, 0,5 est la même chose que 0,50; 0,784 la même chose que 0,78400: car, dans le premier cas, le nombre qui exprime la fraction décimale est devenu dix fois plus grand, mais les parties sont devenues des centièmes, et, par conséquent, dix fois plus petites qu'elles n'étaient d'abord; dans le second cas, le nombre qui exprime la fraction est devenu cent fois

Digitized by Google

plus grand, mais les parties étant devenues des cent-millièmes sont cent fois plus petites qu'elles n'étaient d'abord. Cette transformation revient donc à celle qu'on opère sur une fraction ordinaire, lorsqu'on multiplie ses deux termes par le même nombre; et ce serait les diviser par le même nombre si l'on supprimait des zéros.

88. L'addition des fractions décimales et des nombres qui en contiennent ne demande pas d'autre règle que celle des nombres entiers, puisque les parties décimales se composent les unes des autres, en allant de droite à gauche, de la même manière que les unités entières.

Soient, pour exemple, 0,56, 0,003, 0,958; en les disposant comme il suit :

	0,56
	0,003
	0,958
Somme.....	1,521

on trouve, par la règle du n° 12, que leur somme est 1,521.

Soient encore les nombres 19,35, 0,3, 84,5 et 110,02, qui contiennent des unités entières; on les disposera ainsi.

	19,35
	0,3
	84,5
	110,02
Somme.....	214,17

et l'on trouvera de même que leur somme est 214,17.

En général, *l'addition des nombres décimaux se fait comme celle des nombres entiers, en observant de placer, à la somme, la virgule dans la même colonne où se trouvent toutes celles des nombres à ajouter.*

89. Les règles prescrites pour la soustraction des nombres entiers conviennent aussi, comme on va le voir, aux

Digitized by Google

nombres décimaux. Soit, par exemple, 0,3697 à retrancher de 0,62 ; on observera d'abord que le second nombre, qui ne contient que des centièmes, tandis que le premier renferme des dix-millièmes, peut aussi être converti en dix-millièmes, en mettant deux zéros à sa droite (87), ce qui le change en 0,6200. On disposera ensuite l'opération comme ci-dessous :

	0,6200
	0,3697
Différence....	0,2503

et par la règle du n° 17, on trouvera une différence de 0,2503.

Soit encore le nombre 7,364 à ôter de 9,1457 ; l'opération étant disposée ainsi :

	9,1457
	7,3640
Différence.....	1,7817

on trouve la différence marquée ci-dessus. Il eût été égal de ne pas mettre le zéro à la suite du nombre à retrancher, pourvu qu'on eût placé ses divers chiffres au-dessous de ceux qui marquent, dans le premier nombre, des ordres d'unités ou des parties correspondantes.

En général, *la soustraction des nombres décimaux s'opère comme celle des nombres entiers, pourvu qu'on rende le nombre des chiffres décimaux le même dans les deux nombres proposés, en écrivant à la droite de celui qui en a le moins autant de zéros qu'il est nécessaire ; et l'on place, à la différence, une virgule dans la colonne où se trouvent celles des nombres proposés.*

Les preuves de l'addition et de la soustraction des nombres décimaux se font absolument comme celles des mêmes opérations sur les nombres entiers.

90. La virgule séparant, des parties décimales, les col-

Digitized by Google

lections d'unités entières, son déplacement change nécessairement la valeur du nombre total. En la reculant vers la droite, on fait passer dans la partie entière, des chiffres qui se trouvaient dans la partie fractionnaire; on augmente, par conséquent, la valeur totale du nombre proposé. Au contraire, en avançant la virgule vers la gauche, on fait passer dans la partie fractionnaire des chiffres qui se trouvaient dans la partie entière, et, par conséquent, on diminue la valeur totale du nombre proposé.

Le premier changement rend le nombre proposé dix, cent, mille, etc., fois plus grand, suivant qu'on recule la virgule d'un, deux, trois, etc., rangs vers la droite, parce que chaque fois qu'on recule ainsi la virgule d'un rang, tous les chiffres, comparés à cette virgule, avancent d'un rang vers la gauche, et prennent, par conséquent, une valeur dix fois plus grande que celle qu'ils avaient d'abord.

Si, par exemple, dans le nombre 134,28 on porte la virgule entre le 2 et le 8, on aura 1342,8; les centaines seront devenues des mille, les dizaines des centaines, les unités des dizaines, les dixièmes des unités, et les centièmes des dixièmes. Toutes les parties du nombre étant devenues dix fois plus grandes, c'est comme si on l'avait décuplé, ou multiplié par dix.

Le second changement rend le nombre proposé dix, cent, mille, etc., fois plus petit, selon qu'on avance la virgule d'un, deux, trois, etc., rangs vers la gauche, parce que chaque fois qu'on avance ainsi la virgule d'une place, tous les chiffres, comparés à cette virgule, reculent d'un rang vers la droite, et prennent, par conséquent, une valeur dix fois plus petite que celle qu'ils avaient d'abord.

Si dans le nombre 134,28 on porte la virgule entre le 3 et le 4, on aura 13,428; les centaines seront devenues des dizaines, les dizaines des unités, les unités des dixièmes, les dixièmes des centièmes, les centièmes des mil-

Digitized by Google

lièmes. Toutes les parties du nombre étant devenues dix fois plus petites, c'est comme si l'on en avait pris le dixième, ou qu'on l'eût divisé par dix.

91. Il est facile de prévoir, d'après les considérations précédentes, l'avantage que les fractions décimales ont sur les fractions ordinaires : toutes les multiplications ou les divisions qu'il faut opérer par le dénominateur de celles-ci s'effectuent dans les autres par l'addition, ou la suppression d'un certain nombre de zéros, ou par le simple déplacement de la virgule. En adaptant ces modifications à la théorie des fractions ordinaires, on en déduit sur-le-champ celle des fractions décimales, et la manière d'effectuer la multiplication et la division sur ces fractions; mais on peut y arriver directement par les considérations suivantes.

Je supposerai d'abord que le multiplicande seul ait des chiffres décimaux. Si l'on y fait abstraction de la virgule, il deviendra dix, cent, mille, etc., fois plus grand, suivant le nombre de ses chiffres décimaux; et le produit que donnera, dans ce cas, la multiplication sera un pareil nombre de fois plus grand que celui qu'on cherchait : on obtiendra donc ce dernier en divisant l'autre par dix, cent, mille, etc.; ce qui s'effectuera en séparant sur sa droite (90) autant de chiffres décimaux qu'il y en avait dans le multiplicande.

Si, par exemple, on avait à multiplier 34,137 par 9, on formerait d'abord le produit de 34137 par 9, ce qui donnerait 307233; et comme la suppression de la virgule aurait rendu le multiplicande mille fois plus grand qu'il n'était, il faudrait diviser par mille le produit trouvé, ou séparer par une virgule ses trois derniers chiffres à droite : on aurait ainsi 307,233.

En général, *pour multiplier par un nombre entier un nombre ayant des chiffres décimaux, on fait abstrac-*

Digitized by Google

tion de la virgule dans celui-ci; mais on sépare sur la droite du produit autant de chiffres décimaux que le multiplicande en contient.

92. Lorsque le multiplicateur contient des chiffres décimaux, et qu'on y fait abstraction de la virgule, on le rend dix, cent, mille, etc., fois plus grand, selon le nombre de ses chiffres décimaux : en l'employant dans cet état, il donnera évidemment un produit dix, cent, mille, etc., fois plus grand que celui qu'on aurait dû avoir, et qu'on obtiendra, par conséquent, en divisant le premier par l'un de ces nombres, c'est-à-dire en séparant sur la droite du produit autant de chiffres décimaux qu'en contient le multiplicateur, ou en avançant d'un pareil nombre de places vers la gauche (90) la virgule qui se trouverait dans le produit, si le multiplicande avait aussi des décimales.

Soit pour exemple 172,84 à multiplier par 36,003 : en faisant abstraction de la virgule dans le multiplicateur seulement, on aurait, d'après le numéro précédent, le produit 6222758,52 ; mais le multiplicateur se trouvant mille fois plus grand qu'il n'aurait dû l'être, il faudra diviser ce produit par mille, ou avancer la virgule de trois places vers la gauche, ce qui donnera 6222,75852 pour le produit demandé, dans lequel il se trouvera, par conséquent, autant de chiffres décimaux qu'il y en a, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

En général, *pour multiplier l'un par l'autre deux nombres ayant des chiffres décimaux, on fera abstraction de la virgule dans l'un et dans l'autre; mais on séparera, sur la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'ils en contiennent tous deux.*

Dans certains cas, il faut mettre un ou plusieurs zéros sur la gauche du produit, pour lui donner le nombre des chiffres décimaux qu'il doit avoir suivant la r

Digitized by Google

dente. Si l'on avait, par exemple, 0,624 à multiplier par 0,003; en formant d'abord le produit de 624 par 3, on aurait le nombre 1872, qui ne contient que quatre chiffres; et comme il faudrait séparer six chiffres décimaux, on ne pourrait le faire qu'en mettant à la gauche de ce nombre trois zéros, dont un tiendrait la place des unités, ce qui ferait 0,001872.

93. Il est évident (47) que le quotient de deux nombres ne dépend point de la grandeur absolue de leurs unités, pourvu qu'elle soit la même dans l'un et dans l'autre : s'il s'agissait donc de diviser 451,49 par 13, on observerait que le premier revient à 45149 centièmes, et le second à 1300 centièmes, et que ces derniers nombres doivent donner le même quotient que s'ils exprimaient les unités entières. On serait conduit ainsi à supprimer la virgule dans le premier des nombres proposés, et à mettre deux zéros à la suite du second; et l'on n'aurait plus à diviser que le nombre 45149 par 1300, ce qui donnerait pour quotient $34\frac{949}{1300}$.

On conclura de là, *que pour diviser par un nombre entier un nombre ayant des chiffres décimaux, il faut supprimer la virgule dans celui-ci, mettre à la suite de l'autre autant de zéros que ce dividende contenait de chiffres décimaux; et il n'y aurait rien à changer au quotient.*

94. Lorsque le dividende et le diviseur ont tous deux des chiffres décimaux, on doit, avant de supprimer la virgule, mettre à la suite de celui des deux nombres qui a le moins de chiffres décimaux, assez de zéros pour qu'il se termine au même ordre de décimales que l'autre. Les deux nombres proposés, étant alors rapportés aux mêmes parties de l'unité, donneront le même quotient que s'ils exprimaient des unités entières.

Soit, par exemple, 315,432 à diviser par 23,4; on

Digitized by Google

changera ce dernier nombre en 23,400, et l'on divisera ensuite 315432 par 23400 : le quotient sera $13\frac{11232}{23400}$.

Ainsi, *pour diviser l'un par l'autre deux nombres ayant des chiffres décimaux, on met à la suite de celui qui en a le moins, autant de zéros qu'il en faut pour que le nombre des chiffres décimaux soit le même dans le dividende et dans le diviseur; on fait alors abstraction de la virgule, et il n'y a rien à changer au quotient.*

95. Comme on n'a recours aux décimales que pour éviter l'emploi des fractions ordinaires, il est naturel de s'en servir pour approcher des quotients qu'on ne peut obtenir exactement; ce qui se fait en convertissant en dixièmes, centièmes, millièmes, etc., le reste, afin qu'il puisse contenir le diviseur, comme on le voit dans l'exemple ci-dessous :

	45149	1300
	6149	34,73
Reste.....	949	
dixièmes...	9490	
centièmes...	3900	
	0000	

Lorsqu'on est parvenu au reste 949, on y joint un zéro pour le multiplier par 10, ou le convertir en dixièmes; on forme alors un nouveau dividende partiel composé de 9490 dixièmes, et donnant pour quotient 7 dixièmes, qu'on écrit à la droite des unités, après avoir mis une virgule. Il reste encore 390 dixièmes, que l'on réduit en centièmes, par l'addition d'un nouveau zéro, ce qui forme un second dividende composé de 3900 centièmes, et donnant au quotient 3 centièmes, qu'on place à la suite des dixièmes. L'opération se termine là, et l'on a pour résultat exact 34,73 centièmes. Si elle avait laissé un troisième reste, on l'aurait poussée plus loin, en convertissant ce reste en millièmes, et en continuant toujours de même

Digitized by Google

jusqu'à ce qu'on fût parvenu à un quotient exact, ou à un reste composé de parties assez petites pour qu'on pût les regarder comme de nulle importance.

Il est évident qu'il faut toujours, comme dans l'exemple ci-dessus, mettre une virgule après les unités entières du quotient, pour les distinguer des chiffres décimaux, dont le nombre doit être égal à celui des zéros successivement écrits à la suite des restes (1).

96. Le numérateur d'une fraction, étant converti en parties décimales, pourra se diviser par le dénominateur, comme dans l'exemple précédent, et, par ce moyen, la fraction sera convertie en décimales. Soit pour exemple la fraction $\frac{1}{8}$; on opérera comme ci-dessous :

1	8
10	0,125
20	
40	

Soit encore la fraction $\frac{4}{797}$; il faut d'abord convertir le numérateur en millièmes avant de pouvoir commencer la division écrite plus bas (2) :

4	797
4000	0,005018
1500	
7030	
654	

(1) L'opération que l'on vient d'effectuer sur les décimales n'est qu'un cas particulier de cette autre plus générale : *Évaluer le quotient d'une division en fractions d'une espèce donnée.* Et pour le faire, on convertit le dividende en fraction de la même espèce, en le multipliant par le dénominateur donné. Ainsi, pour évaluer en quinzièmes le quotient 7 par 3, on multipliera 7 par 15, et l'on divisera le produit 105 par 3; on aura 35 quinzièmes ou $\frac{35}{15}$ pour le quotient demandé.

(2) On peut aussi se proposer de convertir une fraction donnée en fraction d'une autre espèce, mais plus petite que la première, de trans-

Digitized by Google

97. Quelque loin qu'on pousse cette dernière division, on n'obtiendra jamais un quotient exact, parce que la fraction $\frac{4}{797}$ ne peut, comme la fraction $\frac{1}{8}$, s'exprimer rigoureusement avec les décimales.

Cette différence tient à ce que le dénominateur de la fraction, ne divisant point le numérateur, ne peut donner un quotient exact que lorsqu'il divise l'un des nombres 10, 100, 1000, etc., par lesquels on multiplie successivement ce numérateur; parce que c'est un principe qu'on trouvera démontré dans l'Algèbre, que tout nombre ne peut diviser un produit qu'autant que ses facteurs premiers divisent ceux de ce produit. Or les nombres 10, 100, 1000, etc., étant tous formés du nombre 10, dont les facteurs premiers sont 2 et 5, ne sont divisibles que par des nombres formés de ces mêmes facteurs : 8 est dans ce cas, puisqu'il résulte de 2 par 2 par 2.

Les fractions qui ne peuvent pas s'évaluer rigoureusement par des décimales offrent dans leur expression approchée, lorsqu'on la pousse assez loin, un caractère qui sert à les faire retrouver : c'est le retour périodique des mêmes chiffres.

Si l'on convertit en décimales la fraction $\frac{12}{37}$, on trouvera 0,324324....., et les chiffres 3, 2, 4 reviendront toujours dans le même ordre, sans que l'opération puisse jamais s'arrêter.

En effet, comme il ne peut y avoir pour reste, dans chaque division, que l'un des nombres entiers qui précèdent le diviseur, il faut nécessairement que, quand on aura fait plus de divisions qu'il n'y a de ces nombres, on

---

former, par exemple, $\frac{3}{4}$ en dix-septièmes; c'est à quoi l'on parviendra en multipliant 3 par 17, et divisant le produit par 4. On trouvera, de cette manière, $\frac{51}{4}$ de dix-septième, ou $\frac{13}{17}$ et $\frac{3}{4}$ de dix-septième; or $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{17}$ équivalent à $\frac{3}{68}$: le résultat $\frac{13}{17}$ est donc approché à $\frac{3}{68}$ près.

Cette opération et celle de la note précédente reposent sur le même principe que l'opération correspondante dans le système décimal.

Digitized by Google

retombe sur quelqu'un des restes précédents, et que, par conséquent, les dividendes partiels reviennent dans le même ordre. Dans l'exemple ci-dessus, trois divisions suffisent pour amener ce retour; mais il en faudrait six pour la fraction $\frac{1}{7}$, parce qu'on trouverait alors pour restes les six nombres qui sont au-dessous de 7, et il viendrait 0,1428571.... La fraction $\frac{1}{3}$ conduit seulement à 0,3333....

98. Les fractions qui ont pour dénominateur un nombre quelconque de 9 n'ont dans leur période que le chiffre significatif 1 :

$\frac{1}{9}$ donne 0,1111.....

$\frac{1}{99}$..... 0,010101.....

$\frac{1}{990}$..... 0,001001001.....

et ainsi des autres, puisque chaque division partielle, s'effectuant sur les nombres 10, 100, 1000, etc., laisse toujours pour reste l'unité.

En profitant de cette remarque, on passe aisément d'une fraction décimale périodique à la fraction ordinaire dont elle dérive. On voit, par exemple, que 0,33333..... revient à la fraction 0,11111..... multipliée par 3; et comme cette dernière est le développement de $\frac{1}{9}$, on en conclut que la première est celui de $\frac{1}{9}$ multiplié par 3, ou de $\frac{3}{9}$, ou enfin de $\frac{1}{3}$.

Quand il s'agit des fractions dont la période est composée de deux chiffres, on les compare au développement de $\frac{1}{99}$, à celui de $\frac{1}{999}$ lorsque leur période renferme trois chiffres, et ainsi de suite.

Soit pour exemple 0,324324.....; il est évident que cette fraction se formerait en multipliant 0,001001..... par le nombre 324 : en multipliant donc $\frac{1}{999}$, dont celle-ci est le développement, par 324, on aura $\frac{324}{999}$ pour la première; et les deux termes de ce résultat étant divisés par 27, on retombera sur la fraction $\frac{12}{37}$.

En général, *la fraction ordinaire d'où résulte une frac-*

Digitized by Google

tion décimale périodique se forme en écrivant comme dénominateur, sous le nombre qu'exprime une période, autant de 9 qu'il y a de chiffres dans cette période.

Si la période de la fraction ne commençait pas au premier chiffre décimal, on pourrait transporter, pour un moment, la virgule immédiatement avant son premier chiffre, et évaluer la fraction à partir de ce chiffre seulement, en considérant comme des unités ceux qui sont à gauche; il n'y aurait plus ensuite qu'à diviser le résultat par 10, 100, 1000, etc., d'après le nombre de places dont on aurait reculé la virgule vers la droite.

La fraction 0,324141....., par exemple, s'écrira d'abord ainsi : 32,4141.....; la partie 0,4141..... répondant à $\frac{41}{99}$, on aura le résultat $32\frac{41}{99}$, qu'il faudra diviser par 100, puisque la virgule a été reculée de deux places vers la droite; et il viendra en conséquence $\frac{32}{100}$ et $\frac{41}{9900}$, ou, en réduisant au même dénominateur, $\frac{3209}{9900}$, fraction qui reproduirait le développement proposé.

Pour se former une idée bien exacte de la nature de ces expressions, il suffit de considérer la fraction 0,999..... En cherchant à remonter à sa valeur primitive, on trouve qu'elle répond à 9 divisé par 9, ce qui n'est autre chose que l'unité; cependant, quel que soit le nombre des chiffres auquel on s'arrête dans son expression, on ne formera jamais l'unité. Si l'on se borne au premier, il s'en faudra de $\frac{1}{10}$, au second de $\frac{1}{100}$, au troisième de $\frac{1}{1000}$, et ainsi de suite : en sorte que l'on peut arriver aussi près de l'unité que l'on voudra, mais sans jamais l'atteindre. L'unité n'est donc ici qu'une *limite* dont l'expression 0,999..... approche d'autant plus qu'on y insère plus de chiffres.

99. Ce qui précède renferme les règles vraiment essentielles de l'arithmétique des nombres abstraits; mais pour les appliquer aux usages de la société, il faut connaître les diverses unités dont on se sert pour comparer

Digitized by Google

entre elles, ou évaluer les quantités; sous quelque forme qu'elles se présentent. Ces unités, qui sont les *mesures* en usage, ont varié avec les temps et les lieux; leur enchaînement ne s'est formé que peu à peu, selon que le besoin et le progrès des arts et des sciences ont obligé de mettre plus d'exactitude dans l'appréciation des matières et dans la construction des instruments.

Après avoir montré pendant longtemps les inconvénients d'un système composé de parties incohérentes, et dont le défaut de liaison mettait dans les calculs une complication inutile et même nuisible à l'instruction générale, les plus illustres savants français ont enfin obtenu l'établissement de nouvelles mesures, liées entre elles, assujetties à la marche du système de numération, prises immédiatement sur les dimensions du globe que nous habitons, et sur la plus répandue des substances qu'il nous présente. L'étendue de ce Traité, et la place qu'il occupe dans l'enseignement, ne me permettent pas de présenter l'extrait de tous les travaux scientifiques exécutés pour l'établissement de ce système, et qui en font le plus beau des monuments élevés à la gloire des sciences et à l'utilité publique dans le siècle dernier; je me bornerai à en exposer sommairement les principes et l'usage.

Digitized by Google

EXPOSITION

DU

NOUVEAU SYSTÈME MÉTRIQUE,

ET APPLICATIONS USUELLES DE L'ARITHMÉTIQUE.

100. Les mesures prennent des formes et des noms différents, suivant l'espèce de grandeurs à laquelle on les applique. Ces grandeurs peuvent être classées ainsi :

Les longueurs, d'où naissent les mesures linéaires;

Les superficies ou les aires;

Les volumes ou les capacités, par lesquels on compare entre eux les corps, soit solides, soit liquides;

Enfin les pesanteurs ou les poids, qui servent aussi à la comparaison des corps.

L'unité de longueur ou l'unité linéaire s'appelle *mètre;*

L'unité de superficie, *are;*

L'unité de volume, *stère* ou *mètre cube* (1);

L'unité de capacité, *litre;*

L'unité de poids, *gramme.*

Pour composer des mesures plus grandes ou plus petites que les précédentes, on se sert des mots *myria, kilo, hecto, déca, déci, centi, milli*, tirés du grec et du latin, et qui désignent respectivement des dizaines de mille, des mille, des centaines, des dizaines, des dixièmes, des centièmes, des millièmes. Les mesures de longueur forment donc la série suivante : *myriamètre, kilomètre, hectomètre, décamètre*, MÈTRE, *décimètre, centimètre, millimètre.*

(1) On nomme *cube* un corps terminé par six faces car

Digitized by Google

Chacune de ces mesures est dix fois plus grande que celle qui la suit, et dix fois plus petite que celle qui la précède immédiatement dans l'ordre de la série.

Le *litre* est une mesure de capacité; sa contenance équivaut au décimètre cube.

Les noms des mesures de capacité se composent comme ceux des mesures de longueur; ainsi l'on dira : *hectolitre*, *décalitre*, LITRE, *décilitre*, *centilitre*, etc.

Le *gramme* est un poids égal à celui d'un centimètre cube d'eau pure (1). Le *myriagramme*, le *kilogramme*, l'*hectogramme*, le *décagramme*, le GRAMME, le *décigramme*, le *centigramme*, etc., forment une série décimale, de même que les autres mesures.

L'*are* est une mesure de superficie, égale au décamètre carré, c'est-à-dire à un carré dont le côté serait un décamètre, ou bien encore à cent mètres carrés. Il n'y a que deux multiples de l'are qui paraissent avoir quelque utilité : l'un est l'*hectare*, qui vaut cent *ares*; l'autre est le *myriare*, qui en vaut dix mille.

Le *stère* pour le bois de chauffage est un mètre cube, ce qui suppose des bûches de la longueur d'un mètre, placées dans un châssis carré, d'un mètre de côté, ou tout autre arrangement équivalent. Les composés du stère ne paraissent pas devoir servir aux usages ordinaires.

Enfin, les unités de monnaie sont connues maintenant sous le nom de *franc*, de *décime*, de *centime*. Leurs valeurs relatives sont également de dix en dix fois plus petites.

Le franc a été formé sur une pièce d'argent du poids de 5 grammes, et alliée de $\frac{1}{10}$ de cuivre (2).

---

(1) Pour obtenir plus d'exactitude dans la détermination de cette unité, on s'est servi d'eau distillée, qu'on a ramenée à son maximum de densité, par un refroidissement convenable.

(2) Un caractère essentiel qui assure à ce système la supériorité sur tout ce qui a été fait en ce genre, c'est que toutes les mesures sont liées entre

Digitized by Google

Le tableau, page 78, est très-propre à faire sentir les avantages de l'uniformité introduite dans la nomenclature des multiples et des subdivisions des mesures prises pour unités. A côté de chaque nom se trouve, entre parenthèses, l'abréviation proposée par M. Dillon, alors vérificateur général des poids et mesures.

---

elles, et ont un rapport immédiat avec les dimensions mêmes du sphéroïde terrestre. Le mètre est la dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur, comptée sur le méridien qui passe à Paris. L'arc de ce méridien, qui traverse la France, ayant été mesuré avec une exactitude inconnue jusqu'ici, et calculé avec la plus grande précision par les méthodes de Delambre, on en a conclu la distance qui se trouve entre le pôle et l'équateur, d'après laquelle on a formé le mètre.

Digitized by Google

Tableau des mesures décimales, montrant le système méthodique de leur nomenclature.

RAPPORTS DES MESURES de chaque espèce à leur valeur principale, EN LETTRES.	EN CHIFFRES.	Ire PARTIE DU NOM, laquelle indique le rapport à la mesure principale.	MESURES PRINCIPALES DE LONGUEUR.	DE CAPACITÉ.	DE POIDS.	AGRAIRES.	POUR LE BOIS de chauffage.	EXEMPLES de noms composés pour exprimer différentes unités de mesures.
Dix mille ...	10000	Myria ..... (M.)	Mètre. (m.)	Litre. (lit.)	Gramme. (gr.)	Are. (ar.)	Stère. (st.)	MYRIAMÈTRE, longueur de dix mille mètres.
Mille	1000	Kilo... ..... (K.)						KILOGRAMME, poids de mille grammes.
Cent..	100	Hecto ..... (H.)						HECTARE, mesure agraire de cent ares.
Dix	10	Déca..... (D.)						DÉCALITRE, mesure de capacité de dix litres.
Un	1	. ...						DÉCIMÈTRE, dixième partie du mètre.
Un dixième...	1,1	Déci..... (d.)						CENTIGRAMME, centième partie du gramme.
Un centième.	0,01	Centi..... (c.)						
Un millième.	0,001	Milli ..... (m.)						NOTA. Plusieurs composés, tels que décaare, kiloare, et tous ceux qui sont formés avec le stère, ne sont point d'usage.
RAPPORT DES MESURES PRINCIPALES ENTRE ELLES ET AVEC LA GRANDEUR DU MÉRIDIEN..... ..			Dix-millionième partie de la distance du pôle à l'équateur.	Un décimètre cube.	Poids d'un centimètre cube d'eau distillée.	Cent mètres carrés.	Un mètre cube.	L'unité monétaire s'appelle FRANC. Le franc se divise en dix DÉCIMES, Et le décime en dix CENTIMES. La valeur du franc est celle d'une pièce d'argent à neuf dixièmes de fin, pesant cinq grammes.

Digitized by Google

101. Toutes les questions dans lesquelles il s'agit de réunir en un seul, plusieurs nombres d'une même espèce de mesures, se rapportent évidemment à l'addition.

Ainsi, pour savoir ce qu'ont produit trois marchés dans lesquels on a vendu successivement pour $1\,334^{f},45$, $1\,951^{f},17$, $183^{f},11$ d'une certaine denrée, il suffit d'ajouter les trois nombres ci-dessus, et la réponse à la question proposée se trouvera dans le total $3\,468^{f},73$.

Je suppose encore qu'on achète quatre pièces d'étoffe dont les longueurs soient exprimées par $217^{m},43$, $97^{m},21$, $194^{m},07$, $51^{m},34$; la somme de ces nombres, exprimée par $560^{m},05$, donnera la quantité totale d'étoffe.

L'application de la soustraction est trop facile pour m'y arrêter.

102. Il est visible que c'est avec le secours de la multiplication, qu'on trouve la valeur d'un nombre donné de choses de même espèce et de même valeur, lorsqu'on connaît cette dernière, qu'il s'agit alors de répéter autant de fois qu'il y a de choses, quelles que soient ces choses.

On voit que le produit ne dépend pas de l'espèce des unités du multiplicateur, mais qu'il est de celle du multiplicande, et que le multiplicateur doit être envisagé comme un nombre abstrait. Cette considération sert à déterminer, dans une multiplication de nombres concrets, celui qu'on doit prendre pour multiplicateur.

Si, par exemple, le mètre d'une certaine étoffe coûte $19^{f},25$, et que l'on demande le prix d'une pièce contenant $37^{m},14$, il suffira de multiplier $19^{f},25$ par $37^{m},14$; le produit $714^{f},94$ sera le prix demandé.

En effet, il est évident que le prix de la pièce doit être composé avec celui du mètre, de la même manière que la longueur de cette pièce est composée avec le mètre. Ainsi, la pièce contenant 37 fois le mètre plus $\frac{14}{100}$ de cette mesure, doit coûter 37 fois $19^{f},25$ plus $\frac{14}{100}$ de ce

Digitized by Google

prix; il faut donc multiplier $19^f,25$ par 37 et $\frac{14}{100}$, et ces deux opérations sont réunies en une seule lorsqu'on prend 37,14 pour multiplicateur.

On peut encore concevoir l'opération sous ce point de vue, fort simple : En regardant d'abord la somme de $19^f,25$ comme le prix du centimètre d'étoffe, c'est-à-dire de l'unité du dernier ordre du multiplicateur, il devient évident que le prix total doit s'obtenir en répétant 3714 fois la somme de $19^f,25$; mais 3174 étant un nombre cent fois plus grand que le véritable multiplicateur 37,14, on ramènera le produit à sa juste valeur, en prenant la centième partie, ou séparant deux chiffres décimaux de plus.

Enfin, en troisième lieu, on reconnaît sans peine que le prix du mètre étant de $19^f,25$, celui de l'unité du dernier ordre du multiplicateur ou du centimètre, dans l'exemple actuel, devant en être la centième partie, sera exprimé par $0^f,1925$, et l'on aura le prix de $37^m,14$, ou 3714 centimètres, en multipliant $0^f,1925$ par 3714.

103. Cette manière d'envisager la question repose sur la facilité de convertir, les unes dans les autres, les subdivisions d'une même espèce de mesures, par le simple changement de place de la virgule, suivant les remarques du n° 90. Si l'on voulait, par exemple, convertir $314^m,513$ en décimètres, il suffirait de reculer la virgule d'un rang vers la droite, ce qui donnerait $3145^{dm},13$, puisque alors on prendrait le décimètre pour l'unité.

En supprimant la virgule, les millimètres deviennent des unités, et l'on a, par conséquent, le nombre de millimètres contenus dans la grandeur proposée, exprimé par 314513 millimètres.

104. On reviendrait de cette dernière subdivision à celles qui la précèdent, c'est-à-dire au centimètre, au

Digitized by Google

décimètre, au mètre, en séparant successivement une, deux ou trois décimales. Si l'on en séparait quatre, on prendrait le décamètre pour unité, et l'on aurait $31^{Dm},4513$; continuant de la même manière, il viendrait $3^{Hm},14513$, etc.

Ces considérations et celles du numéro précédent s'appliqueraient sans peine à toute autre espèce de mesures du système décimal, et offrent un des plus grands avantages de ce système.

105. Je vais indiquer à présent quelques usages de la division. Elle sert premièrement à résoudre toutes les questions du genre de la suivante : *Connaissant ce qu'a coûté un certain nombre de choses de la même valeur, trouver cette valeur.* Cela se voit en observant que le prix connu est nécessairement le produit du prix d'une chose multiplié par le nombre des choses (102); car il résulte de là qu'en divisant ce produit par le facteur connu, qui est le nombre des choses, on doit obtenir pour quotient l'autre facteur, ou le prix d'une seule chose (36).

Je suppose, par exemple, qu'ayant payé $19^{m},13$ d'étoffe, $315^{f},45$, on demande à combien revient le mètre. Pour le trouver, on divisera $315^{f},45$ par 19,13; on obtiendra $16^{f},49$.

On parviendrait encore au même résultat si l'on convertissait $19^{m},13$ en 1913 centimètres, et qu'on divisât $315^{f},45$ par 1913; on aurait alors le prix du centimètre, qu'il faudrait multiplier ensuite par 100 pour avoir celui du mètre : or il est évident qu'en employant un diviseur tel que 19,13, cent fois plus petit que 1913, on obtiendra un quotient cent fois plus grand, et, par conséquent, égal à celui qu'on cherche. En divisant donc $315^{f},45$ par 19,13, on trouvera $16^{f},49$ pour le prix du mètre d'étoffe.

106. Voici une seconde question dans laquelle le divi-

Digitized by Google

dende et le diviseur sont tous deux de même nature, et où le quotient est d'une nature différente.

On demande combien, pour $529^f,35$, on aura de kilogrammes d'une certaine marchandise qui coûte $14^f,5$ le kilogramme. Il est clair que le nombre cherché est composé avec le kilogramme (son unité), comme $529^f,35$ l'est avec $14^f,5$, prix du kilogramme. Si donc on divise 529,35 par 14,5, le quotient 36,50689 sera des kilogrammes et des subdivisions de cette espèce d'unité.

107. L'emploi des fractions s'offre de lui-même par l'énoncé des questions. Si, par exemple, il fallait évaluer les $\frac{3}{4}$ de $219^f,6$, on aurait à multiplier $219^f,6$ par $\frac{3}{4}$, c'est-à-dire à multiplier ce nombre par 3, et à diviser ensuite le résultat par 4, ce qui donnerait $164^f,7$ (75).

On pourrait multiplier beaucoup les diverses questions qui se résolvent par les quatre règles, mais ce soin est inutile; car l'application de ces règles ne saurait présenter aucune difficulté, lorsque l'on comprend bien la définition et le but de chacune.

Des Proportions.

108. On a vu, dans ce qui précède, les diverses méthodes nécessaires pour effectuer sur les nombres, soit entiers, soit fractionnaires, les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division; et toutes les questions relatives aux nombres doivent être regardées comme résolues, lorsque, par l'examen attentif de leur énoncé, on est parvenu à les réduire à quelques-unes de ces opérations. Je pourrais, en conséquence, terminer ici ce que j'ai à dire sur l'Arithmétique; car le reste est, à proprement parler, du ressort de l'Algèbre; mais cependant je vais résoudre quelques questions qui, en exerçant les lecteurs sur ce qu'ils ont déjà vu, les prépareront à l'analyse algébrique,

Digitized by Google

et les conduiront à une théorie bien importante, celle des rapports et des proportions que l'on comprend ordinairement dans l'Arithmétique.

109. *Une pièce de drap contenant* 13 *mètres a été payée* 130 *francs: on demande combien coûterait une pièce du même drap qui aurait* 18 *mètres de longueur.*

Il est évident que, si l'on savait à combien revient le mètre du drap qu'on a acheté, on répéterait ce prix dix-huit fois, et l'on aurait pour résultat le prix de la pièce composée de 18 mètres; or, puisque 13 mètres ont coûté 130 francs, un mètre seul aurait coûté la treizième partie de 130 francs ou $\frac{130}{13}$: faisant la division, on trouve pour résultat 10 francs, et multipliant ce nombre par 18, il vient 180 francs pour la somme demandée. Telle est, en effet, la valeur de la pièce de 18 mètres.

Un courrier qui va toujours également vite, ayant fait 5 *myriamètres en* 3 *heures, on demande combien il en ferait en* 11 *heures.*

En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on voit que ce courrier ferait en une heure $\frac{1}{3}$ de 5 myriamètres, ou $\frac{5}{3}$, et que dans 11 heures il en ferait 11 fois plus, ou $\frac{5}{3}$ de myriamètre multipliés par 11, ou enfin $\frac{55}{3}$, ce qui vaut 18 myriamètres et $\frac{1}{3}$.

Je suppose encore qu'*on demande dans combien de temps le courrier de la question précédente ferait* 22 *myriamètres.*

On voit que, si l'on connaissait le temps qu'il met à faire un myriamètre, on répéterait ce temps 22 fois, et l'on aurait pour résultat le nombre d'heures cherché; or le courrier dont il s'agit, mettant 3 heures à faire 5 myriamètres, n'emploiera que $\frac{1}{5}$ de ce temps, ou $\frac{3}{5}$ d'heure pour faire un myriamètre : ce nombre, étant multiplié par 22, donne $\frac{66}{5}$ ou 13 heures $\frac{1}{5}$; et comme l'heure est de 60 minutes, on aura 13 heures 12 minutes, au lieu de 13 heures et $\frac{1}{3}$.

Digitized by Google

110. C'est par l'analyse de chacun des énoncés précédents, que j'ai découvert la quantité inconnue ; mais dans toutes ces questions, les nombres connus et les nombres cherchés dépendent les uns des autres d'une manière qu'il est à propos d'examiner.

Pour cela, je reprends la première question, dans laquelle il s'agit de connaître le prix de 18 mètres de drap, dont 13 ont été payés 130 francs.

Il est évident que la somme à payer pour une pièce de l'étoffe dont il s'agit, deviendrait double si cette pièce contenait un nombre de mètres double du premier ; que si ce nombre devenait triple, le prix triplerait aussi, et ainsi de suite ; enfin, que pour la moitié ou les $\frac{2}{3}$ de la pièce, on n'aurait à payer que la moitié ou les deux tiers du prix total.

D'après ces notions, que tous ceux qui entendent la propriété des termes admettent sans difficulté, on voit que si l'on a deux pièces du même drap, le prix de la seconde doit contenir celui de la première autant que la longueur de la seconde contient celle de la première ; et cette circonstance s'énonce en disant que les prix sont en *proportion* des longueurs, ou sont entre eux dans le même *rapport* que les longueurs.

Cet exemple va servir à fixer le sens de plusieurs expressions qui reviennent souvent.

111. Le *rapport* des longueurs est le nombre, soit entier, soit fractionnaire, qui exprime combien l'une des longueurs contient l'autre. Si la première pièce avait 4 mètres, et la seconde 8, le rapport de celle-ci à l'autre serait 2, puisque 8 contient 4 deux fois. Dans l'exemple ci-dessus, la première pièce avait 13 mètres, et la seconde 18 ; le rapport de celle-ci à l'autre était donc $\frac{18}{13}$, ou $1\frac{5}{13}$. En général, *le rapport, ou la raison de deux nombres, est le quotient de l'un par l'autre.*

Digitized by Google

Les prix ayant entre eux le même rapport que les longueurs, il faut que 180, prix de la seconde pièce, étant divisé par 130, prix de la première, donne $\frac{18}{13}$ pour quotient, et c'est ce qui a lieu en effet; car, en réduisant $\frac{180}{130}$ à sa plus simple expression, on a $\frac{18}{13}$.

Les quatre nombres 13, 18, 130, 180, écrits dans l'ordre où on les voit ici, sont donc tels, que *le deuxième contient le premier autant de fois que le quatrième contient le troisième;* et ils forment ainsi ce qu'on appelle une *proportion*.

Les nombres 13, 18, 130 et 180 se nomment les termes de la proportion.

On dit aussi qu'*une proportion est l'assemblage de deux rapports égaux*.

Il faut observer, à cette occasion, qu'un rapport ne change pas lorsqu'on multiplie ou qu'on divise ses deux termes par un même nombre ; et cela est évident, puisque ce rapport, n'étant que le quotient d'une division, peut toujours être mis sous une forme fractionnaire. C'est ainsi que le rapport $\frac{18}{13}$ est le même que $\frac{180}{130}$.

Les mêmes considérations s'appliquent encore au deuxième exemple. Le courrier qui fait 5 myriamètres en 3 heures ferait un chemin double dans un temps double, triple dans un temps triple : ainsi, 11 heures, nombre qui exprime le temps que ce courrier a employé pour faire 18 myriamètres et $\frac{1}{3}$, ou $\frac{55}{3}$ de myriamètre, doit contenir 3 heures, nombre qui marque le temps qu'il met à faire 5 myriamètres, autant que $\frac{55}{3}$ contient 5 : les quatre nombres 5, $\frac{55}{3}$, 3, 11 sont donc en proportion; et, en effet, si l'on divise $\frac{55}{3}$ par 5, on aura $\frac{55}{15}$, résultat équivalent à $\frac{11}{3}$. Il sera facile maintenant de reconnaître tous les cas où il y aura proportion entre quatre nombres.

112. Pour indiquer qu'il y a proportion entre les nombres 13, 18, 130 et 180, on les écrit ainsi :

Digitized by Google

13 : 18 :: 130 : 180; et l'on énonce : 13 *est à* 18 *comme* 130 *est à* 180; ce qui veut dire que 13 est la même partie de 18, que 130 l'est de 180, ou que 13 est contenu dans 18 autant de fois que 130 l'est dans 180, ou enfin que le rapport de 18 à 13 est le même que celui de 180 à 130.

Le premier terme d'un rapport s'appelle *antécédent*, et le second se nomme *conséquent*. Dans une proportion, il y a deux *antécédents* et deux *conséquents*, savoir, l'antécédent du premier rapport et celui du second. Dans la proportion 13 : 18 :: 130 : 180, les antécédents sont 13 et 130, les conséquents sont 18 et 180.

Je continuerai de prendre le conséquent du rapport pour le numérateur de la fraction qui exprime le rapport, et l'antécédent pour le dénominateur.

113. Pour s'assurer qu'il y a proportion entre les quatre nombres 13, 18, 130 et 180, il faut voir si les fractions $\frac{18}{13}$ et $\frac{180}{130}$ sont égales, et pour cela, réduire la seconde à sa plus simple expression; mais on peut aussi faire la même vérification, en observant que si les deux fractions $\frac{18}{13}$ et $\frac{180}{130}$ sont équivalentes, comme on le suppose, il s'ensuit qu'en les réduisant au même dénominateur, le numérateur de l'une deviendra égal à celui de l'autre, et que, par conséquent, 18 multiplié par 130 donnera le même produit que 180 par 13. C'est ce qui a lieu, en effet; et le raisonnement qui l'a fait connaître, étant indépendant de la valeur particulière des nombres, prouve que *si quatre nombres sont en proportion, le produit du premier et du dernier, ou des deux* extrêmes, *est égal à celui du deuxième et du troisième, ou des deux* moyens.

On voit en même temps que si les quatre nombres proposés n'étaient pas en proportion, ils n'auraient pas la propriété énoncée ci-dessus; car la fraction qui exprime

Digitized by Google

le premier rapport n'étant pas équivalente à celle qui exprime le second, le numérateur de l'une ne deviendrait pas égal à celui de l'autre, lorsqu'on les réduirait toutes deux au même dénominateur.

114. La première conséquence qui se déduit naturellement de ce qui précède, c'est qu'on peut changer l'ordre des termes d'une proportion, pourvu que celui qu'on établit soit tel, que le produit des extrêmes demeure égal à celui des moyens. Dans la proportion 13 : 18 :: 130 : 180, on peut donc faire les arrangements suivants :

13	:	18	::	130	:	180,
13	:	130	::	18	:	180,
180	:	130	::	18	:	13,
180	:	18	::	130	:	13,
18	:	13	::	180	:	130,
18	:	180	::	13	:	130,
130	:	13	::	180	:	18,
130	:	180	::	13	:	18;

car dans chacun d'eux le produit des extrêmes et le produit des moyens demeurent formés des mêmes facteurs. Le second arrangement, dans lequel les moyens ont changé de place entre eux, est un de ceux qui se pratiquent le plus souvent (1).

---

(1) Je crois à propos d'observer que la proportion 13 : 130 :: 18 : 180 se serait présentée immédiatement sous cette forme, d'après la solution même de la question du n° **109**; car on peut avoir la valeur d'un mètre de drap, de deux manières, savoir : en divisant le prix de la pièce de 13 mètres par 13, ou en divisant celui de la pièce de 18 mètres par 18. Il suit donc de là que le prix de la première doit contenir 13 autant que le prix de la seconde contient 18; on aura donc 13 : 130 :: 18 : 180. On pourrait raisonner de même sur la deuxième question du même numéro, ainsi que sur toutes celles de ce genre, et dériver de là les proportions; mais j'ai préféré le point de vue du n° **109**, parce qu'il conduit à comparer entre elles des quantités de même espèce, tandis qu'ici il faut comparer les prix, qui sont des sommes d'argent, à des mètres, qui sont des mesures de longueur, ce qui ne peut se faire qu'en considérant les uns et les autres comme des nombres abstraits.

Digitized by Google

115. Il fait voir qu'on peut multiplier ou diviser par un même nombre, les deux antécédents ou les deux conséquents d'une proportion sans la troubler; car ce changement fait des deux antécédents le premier rapport, et des deux conséquents le second. Si l'on avait, par exemple, 55 : 21 :: 165 : 63, en changeant les moyens de place, il viendrait 55 : 165 :: 21 : 63; on pourrait alors diviser les deux termes qui forment le premier rapport par le nombre 5 (111), ce qui donnerait 11 : 33 :: 21 : 63; changeant de nouveau les moyens de place, on trouverait 11 : 21 :: 33 : 63, proportion qui est elle-même vraie, et qui ne diffère de la proposée qu'en ce que les deux antécédents ont été divisés par 5.

116. Puisque le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, on peut prendre l'un pour l'autre; et comme, en divisant le produit des extrêmes par un extrême, on trouverait nécessairement l'autre au quotient, il faudra aussi qu'*en divisant le produit des moyens par un extrême, on trouve l'autre extrême*. Par la même raison, *si l'on divise le produit des extrêmes par un des moyens, on obtiendra l'autre moyen.*

On peut donc trouver un terme quelconque d'une proportion, lorsque l'on connaît les trois autres; car le terme cherché ne peut être que l'un des extrêmes ou l'un des moyens.

La question du n° 109 se résout par l'une des règles ci-dessus. En effet, lorsqu'on a reconnu que les prix des deux pièces de drap sont en proportion avec le nombre de mètres contenus dans chacune, on écrit ainsi cette proportion :

$$13 : 18 :: 130 : x,$$

en mettant la lettre x pour tenir la place du prix cherché de la pièce de 18 mètres, et l'on trouve ce prix, qui est l'un des extrêmes, en multipliant entre eux les deux

Digitized by Google

moyens 18 et 130, ce qui donne 2340; et en divisant ce produit par l'extrême connu 13, on a pour résultat 180.

L'opération par laquelle trois quelconques des termes d'une proportion étant donnés on trouve le quatrième, s'appelle *règle de trois*. Les auteurs de la plupart des livres d'Arithmétique ont distingué plusieurs espèces de règles de trois; mais cet échafaudage est inutile lorsque l'on a bien conçu ce qui constitue la proportion, et qu'on entend bien l'énoncé de la question proposée. Quelques applications vont éclaircir ceci.

117. Un ouvrier ayant fait $217^m,5$ d'ouvrage en 9 jours, on demande combien il mettrait de temps à en faire $423^m,9$, en supposant qu'il travaillât toujours de la même manière.

Dans cette question, l'inconnue est un nombre de jours qui doit contenir les 9 jours employés à faire $217^m,5$, autant que 423,9 contient 217,5; on a donc la proportion suivante : $217,5 : 423,9 :: 9 : x$, et l'on trouve pour x 17,54.

118. Toute la difficulté des questions qu'on peut rencontrer ne consiste que dans la manière d'établir la proportion, et voici des règles sûres pour la former dans tous les cas.

Parmi les quatres termes qui doivent composer la proportion, il y a deux nombres qui sont d'une même espèce, et deux nombres qui sont aussi d'une même espèce, mais différente de la première. Dans l'exemple précédent, deux des termes exprimaient des mètres, et les autres des jours.

Il faut donc d'abord distinguer les deux termes de chaque espèce; et quand cela sera fait, on aura nécessairement le quotient du plus grand terme de la seconde espèce divisé par le plus petit terme de cette espèce, égal au quotient du plus grand terme de la première espèce

Digitized by Google

divisé par le plus petit de cette espèce, ce qui donnera cette proportion :

Le plus petit terme de la première espèce
est
au plus grand terme de cette espèce,
comme
le plus petit terme de la seconde espèce
est
au plus grand de cette espèce.

Dans l'exemple précédent, cette règle donne tout de suite $217,5 : 423,9 :: 9 : x$; car le terme inconnu doit être plus grand que 9, puisqu'il faut d'autant plus de jours qu'il y a plus d'ouvrage à faire.

119. Si l'on s'était proposé de trouver combien 27 ouvriers mettraient de jours à exécuter un ouvrage que 15 ouvriers qui travaillaient autant que ceux-ci ont fait en 18 jours, on verrait qu'il faut d'autant moins de jours qu'il y a plus d'ouvriers, et réciproquement. Il y a bien encore proportion dans ce cas, mais dans un ordre inverse; car si le nombre des ouvriers de la seconde bande était triple de celui de la première, par exemple, il ne leur faudrait que le tiers du temps employé par ceux-ci : ce serait donc le premier nombre de jours qui devrait contenir le second, autant que le second nombre d'ouvriers contient le premier.

L'ordre dans lequel ces quantités se contiennent étant l'inverse de celui qui leur est assigné par l'énoncé de la question, on dit que les deux nombres d'ouvriers sont en *raison inverse* des nombres de jours. Si l'on comparait les deux premiers et les deux derniers dans l'ordre où ils se présentent, le rapport des uns serait 3 ou $\frac{3}{1}$, et celui des autres serait $\frac{1}{3}$, fraction inverse de $\frac{3}{1}$.

On voit bien, en effet, qu'on renverse un rapport en renversant la fraction qui l'exprime, puisqu'on fait ainsi

Digitized by Google

passer l'antécédent à la place du conséquent, et le conséquent à la place de l'antécédent : $\frac{3}{2}$ ou 2 : 3 est l'inverse de $\frac{2}{3}$ ou de 3 : 2.

La règle du numéro précédent simplifie beaucoup ces considérations; car, en prenant les deux nombres d'ouvriers pour les quantités de la première espèce, les deux nombres de jours pour celles de la seconde, et posant les unes et les autres d'après leur ordre de grandeur, on a cette proportion :

$$15 : 27 :: x : 18,$$

de laquelle on tire x égal à 10.

120. Voici encore quelques exemples pour exercer le lecteur.

1°. Un homme a placé 3575 francs dans un commerce, à raison de 5 pour 100 d'intérêt par an: on demande à combien doit se monter, au bout d'un an, l'intérêt de son capital.

L'expression 5 pour 100 d'intérêt, qu'on écrit ainsi : 5 p. $\frac{0}{0}$, signifie qu'une somme de 100 francs rapporterait 5 francs au bout d'un an; en prenant donc les deux capitaux pour les quantités de la première espèce, et les intérêts pour celles de la seconde, on aura

$$100 : 3575 :: 5 : x,$$

proportion qui se réduit à 20 : 3575 :: 1 : x, d'après l'observation du n° 115; divisant encore les deux termes du premier rapport par 5, on trouve enfin

$$4 : 715 :: 1 : x,$$

d'où x est égal à $\frac{715}{4}$ ou à $178^{f},75$.

On peut encore résoudre cette question en observant que 5 sont $\frac{1}{20}$ de 100, et que, par conséquent, on aura l'intérêt d'une somme quelconque à ce taux, en prenant

Digitized by Google

le vingtième de cette somme; or $\frac{1}{20}$ de 3575 est $178^f,75$, résultat conforme à celui qu'on a déjà trouvé ci-dessus.

2°. Un marchand a promis de payer 800 francs dans un an; ne pouvant attendre ce terme, on passe son billet à un banquier huit mois avant l'époque du payement : on demande combien doit donner le banquier. Celui-ci sortant de sa caisse une somme qui n'y doit rentrer que dans huit mois, il faut nécessairement qu'il trouve dans le remboursement qui lui sera fait alors l'intérêt de ses fonds.

Que l'intérêt pour un an soit de 6 pour 100, l'intérêt pour huit mois en sera les $\frac{8}{12}$ ou les $\frac{2}{3}$: donc une somme de 100 francs, prêtée pour huit mois, doit produire 4 fr. d'intérêt, c'est-à-dire que celui qui l'a empruntée doit rendre 104 francs. La somme avancée par le banquier n'étant qu'un semblable prêt, on aura cette proportion :

$$104^f : 100^f :: 800 : x,$$

d'où il viendra $769^f,23$ pour la valeur de x, c'est-à-dire pour la somme que le banquier doit donner (1).

Règle de trois composée.

121. La règle de trois s'applique encore à des questions dans lesquelles le rapport de la quantité cherchée à la quantité donnée de même espèce dépend de plusieurs circonstances qu'il faut combiner, et elle prend alors le nom de *règle de trois composée*. En voici quelques exemples.

Je suppose que l'on demande combien de myriamètres

(1) L'opération ci-dessus, qui s'appelle *règle d'escompte*, est réduite ordinairement à prélever l'intérêt de la somme entière portée sur le billet, ce qui ne répond pas à l'état de la question, et n'est pas exact. Dans notre exemple, l'intérêt étant de 4 pour 100 monterait à 32 francs; le banquier ne donnerait donc que 768 francs.

De cette manière, *l'escompte est pris en dehors;* de l'autre il l'est *en dedans* de la somme portée sur le billet.

Digitized by Google

parcourrait en 17 jours un voyageur marchant 10 heures par jour, lorsqu'on sait qu'il a employé 29 jours à faire 112 myriamètres en marchant 7 heures par jour.

Cette question peut se résoudre de deux manières; voici celle qui donne lieu à la règle de trois composée.

Le nombre de myriamètres parcourus dans chaque cas dépend de deux circonstances, savoir : du nombre de jours de route du voyageur, et du nombre d'heures pendant lesquelles il marche chaque jour.

On peut d'abord faire abstraction de cette dernière, et supposer que le nombre d'heures reste le même dans le second cas que dans le premier. Alors la question serait posée ainsi : *Un voyageur a mis* 29 *jours à faire* 112 *myriamètres : combien en ferait-il en* 17 *jours?* et l'on aurait la proportion :

$$29^{j} : 17^{j} :: 112^{myr} : x.$$

Le quatrième terme serait égal à 112 multiplié par 17 et divisé par 29, ou $\frac{1904}{29}$ myriamètres.

Maintenant, pour avoir égard à la différence des nombres d'heures de marche, on dirait : *Si, en marchant* 7 *heures par jour, pendant un certain nombre de jours, ce voyageur a fait* $\frac{1904}{29}$ *myriamètres, combien en ferait-il dans le même temps, s'il marchait* 10 *heures par jour?* ce qui conduirait à la proportion :

$$7^{h} : 10^{h} :: \frac{1904}{29}{}^{myr} : x,$$

dont le quatrième terme donnerait 93,793 pour le nombre de myriamètres demandé.

La question se résoudrait aussi en observant que 29 jours de marche, à 7 heures par jour, équivalent à 203 heures de marche; que 17 jours, à 10 heures par jour, donnent

Digitized by Google

170 heures, et que, par conséquent, le problème est ramené à cette proportion :

$$203^{h} : 170^{h} :: 112^{myr} : x,$$

par laquelle on trouve le chemin que doit faire le voyageur en 170 heures, d'après celui qu'il a fait en 203.

122. Secondement, si 9 ouvriers, en travaillant 8 heures par jour, ont mis 24 jours à creuser un fossé de 65 mètres de longueur sur 13 de largeur et 5 de profondeur, combien faudrait-il de jours à 71 ouvriers de la même force que les premiers, et qui travailleraient 11 heures par jour, pour creuser un fossé de 327 mètres de longueur sur 18 de largeur et 7 de profondeur?

Voilà encore une question fort compliquée en apparence, et qui se résout également par la règle de trois.

Si tout, à l'exception du nombre de jours et du nombre d'hommes, était semblable dans les deux cas énoncés, la question se réduirait à trouver combien il faudrait de jours à 71 hommes pour faire l'ouvrage qu'ont effectué 9 hommes en 24 jours : on aurait donc (118)

$$9 : 71 :: x : 24;$$

mais ici, au lieu de calculer le nombre de jours, je me contente d'indiquer, comme dans le n° 70, les nombres à multiplier entre eux, et de placer au dénominateur ceux par lesquels il faut diviser : j'ai ainsi, pour le nombre x de jours,

$$\frac{24 \text{ par } 9}{71}.$$

Mais les premiers ouvriers ne travaillant que 8 heures par jour, tandis que les seconds en travaillent 11, il faudra d'autant moins de jours à ceux-ci; on aura donc

$$8 : 11 :: x : \frac{24 \text{ par } 9}{71},$$

Digitized by Google

d'où l'on conclura que le nombre de jours, dans cette circonstance, est

$$\frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8}{71 \text{ par } 11}.$$

Ce nombre est celui des jours nécessaires aux 71 ouvriers, travaillant 11 heures par jour, pour creuser le premier fossé.

Les fossés étant d'inégales longueurs, il faudra d'autant plus de jours que le second fossé sera plus long que le premier; on aura ainsi

$$65 : 327 :: \frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8}{71 \text{ par } 11} : x,$$

et le nombre de jours relatif à cette nouvelle circonstance sera

$$\frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65}.$$

En ayant égard aux largeurs, qui ne sont pas les mêmes pour chaque fossé, j'ai

$$13 : 18 :: \frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65} : x,$$

et, par conséquent, le nombre de jours cherché se change en

$$\frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13}.$$

Enfin les profondeurs étant différentes, on a

$$5 : 7 :: \frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13} : x,$$

et le nombre de jours résultant du concours de toutes les circonstances est

$$\frac{24 \text{ par } 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18 \text{ par } 7}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13 \text{ par } 5}.$$

Digitized by Google

En effectuant les multiplications et les divisions, on arrivera au résultat cherché, 21 jours $\frac{1802831}{3299725}$.

123. Ce nombre est égal à 24 multiplié par la quantité fractionnaire

$$\frac{9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18 \text{ par } 7}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13 \text{ par } 5};$$

mais cette dernière quantité, qui exprime le rapport du nombre de jours donné au nombre de jours cherché, est elle-même le produit des fractions suivantes :

$$\frac{9}{71}, \frac{8}{11}, \frac{327}{65}, \frac{18}{13}, \frac{7}{5}.$$

Or, en remontant aux dénominations des nombres donnés dans l'énoncé de la question, on voit que $\frac{9}{71}$ est l'inverse du rapport des nombres d'hommes, qui, pris dans l'ordre de l'énonciation, serait 9 à 71, puisqu'il y a 9 hommes dans le premier cas et 71 dans le second; $\frac{8}{11}$ est pareillement l'inverse du rapport du nombre d'heures que chaque bande d'ouvriers doit travailler; $\frac{327}{65}$, $\frac{18}{13}$ et $\frac{7}{5}$ sont les rapports directs des longueurs, des largeurs et des profondeurs des deux fossés. Il suit de là que le rapport du nombre de jours donné au nombre de jours cherché est égal au produit de tous les rapports directs et de tous les rapports inverses qui résultent de la comparaison des termes relatifs à chacune des circonstances de la question.

On résoudra la question très-simplement, en évaluant d'abord chacun de ces rapports; car, en multipliant entre elles les fractions qui les expriment, on formera celle qui représente le rapport de la quantité cherchée à la quantité donnée de même espèce. Cette dernière fraction, qui sera le produit de tous les rapports qui entrent dans la

Digitized by Google

question, aura pour numérateur le produit de tous leurs conséquents, et pour dénominateur celui de tous leurs antécédents. Un rapport qui résulte ainsi de la multiplication de plusieurs autres s'appelle *rapport composé*.

En mettant l'expression fractionnaire

$$\frac{9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18 \text{ par } 7}{71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13 \text{ par } 5}$$

sous la forme d'un rapport, on en tirera, avec le nombre 24 des jours donnés, la proportion

$$71 \text{ par } 11 \text{ par } 65 \text{ par } 13 \text{ par } 5 : 9 \text{ par } 8 \text{ par } 327 \text{ par } 18 \text{ par } 7 :: 24 : x,$$

qu'il est aisé d'imiter dans tous les cas semblables.

Règle de Société.

124. Cette règle a pour objet de partager un nombre en parties qui aient entre elles des rapports donnés; on verra, dans l'exemple suivant, son origine et d'où elle a tiré son nom.

Trois marchands se sont associés pour un commerce : le premier a mis 25000 francs, le second 18000, et le troisième 42000; ils se séparent, et veulent partager entre eux le bénéfice commun, qui se monte à 57225 fr. : on demande combien chacun doit avoir pour sa part.

Pour résoudre cette question, il faut considérer que le gain de chacun d'eux doit être composé avec le gain total, comme sa mise l'est avec la somme des mises ou le fonds total; car celui qui aurait fourni à lui seul la moitié ou le tiers de ce fonds, par exemple, aurait évidemment droit à la moitié ou au tiers du gain. Dans l'exemple proposé, la somme des mises formant 85000 francs, les mises particulières en seront respectivement les

$$\frac{25000}{85000}, \quad \frac{18000}{85000}, \quad \frac{42000}{85000};$$

Digitized by Google

et en multipliant par ses fractions le gain total 57 225 fr., on obtiendra le gain relatif à chaque mise. Il est d'ailleurs évident que la somme des parts égalera le gain total, puisque la somme des fractions ci-dessus, ayant son numérateur égal à son dénominateur, est nécessairement l'unité.

Les opérations indiquées plus haut donnent les proportions

85000 : 25000 :: 57225 : au gain du premier marchand,
85000 : 18000 :: 57225 : au gain du second,
85000 : 42000 :: 57225 : au gain du troisième,

qui peuvent s'énoncer ainsi :

la mise totale : une mise particulière :: le gain total : au gain particulier.

En simplifiant le premier rapport de chacune de ces trois proportions, on a

85 : 25 :: 57225 : au gain du premier, ou 16830 fr. $\frac{75}{85}$;
85 : 18 :: 57225 : au gain du second, ou 12118 fr. $\frac{29}{85}$;
85 : 42 :: 57225 : au gain du troisième, ou 28275 fr. $\frac{75}{85}$.

Si toutes les mises étaient égales, l'opération se réduirait à diviser le gain total par le nombre des mises; on ramène la question à ce point dans l'exemple proposé, en concevant la mise totale 85000 francs, partagée en 85 mises partielles ou *actions* de 1000 francs : le gain de chacune de ces mises doit être évidemment la 85e partie du gain total, et il ne reste plus qu'à multiplier successivement cette partie par 25, 18 et 42, en considérant les mises 25000 francs, 18000 francs, 42000 francs, comme les réunions de 25 actions, de 18 actions, de 42 actions.

Il est bon de savoir qu'en terme de commerce, la mise totale se nomme *capital*, et le gain à partager *dividende*.

La question suivante a beaucoup d'analogie avec celle qui vient d'être résolue.

Digitized by Google

125. On demande de partager une succession de 67250 francs entre trois héritiers, de manière que la part du second soit les $\frac{2}{5}$ de celle du premier, et que la part du troisième soit les $\frac{7}{8}$ de celle du second.

Il est évident que la part du troisième, comparée à celle du premier, en sera les $\frac{7}{8}$ des $\frac{2}{5}$, ou les $\frac{14}{40}$, ou les $\frac{7}{20}$: ces trois parts cherchées seront donc entre elles dans les mêmes rapports que les trois nombres 1, $\frac{2}{5}$ et $\frac{7}{20}$. En réduisant ceux-ci au même dénominateur, on trouvera $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{7}{20}$, et l'on aura les trois nombres 20, 8, 7, qui seront proportionnels aux premiers; mais leur somme étant 35, on voit que si l'on prend trois parts qui soient exprimées par les fractions $\frac{20}{35}$, $\frac{8}{35}$, $\frac{7}{35}$, elles seront entre elles dans les rapports demandés : la question sera donc résolue en prenant les $\frac{20}{35}$, puis les $\frac{8}{35}$, puis les $\frac{7}{35}$ de 67250 francs, ce qui donnera les sommes dues aux héritiers, suivant la distribution prescrite, savoir :

38428 fr. $\frac{20}{35}$, 15371 fr. $\frac{15}{35}$ et 13450 fr.

126. Enfin soient deux fontaines dont la première coulant seule pendant 2 heures et $\frac{1}{2}$, remplit un certain bassin, et dont la seconde remplit ce même bassin, en coulant seule pendant 3 heures $\frac{3}{4}$: on demande combien il faudra de temps pour qu'il soit rempli par les deux fontaines coulant à la fois ?

Je cherche quelle partie du bassin la première fontaine remplit dans un temps donné, dans une heure par exemple, et je vois qu'en prenant la capacité de ce bassin pour unité, je n'ai qu'à diviser 1 par 2 $\frac{1}{2}$ ou $\frac{5}{2}$, ce qui donne $\frac{2}{5}$ pour la partie cherchée. En divisant de même 1 par 3 $\frac{3}{4}$ ou $\frac{15}{4}$, j'obtiens $\frac{4}{15}$ pour la portion du bassin que la seconde fontaine fournit pendant une heure; les deux fontaines coulant ensemble donneront, par conséquent, les $\frac{2}{5}$ plus les $\frac{4}{15}$ ou les $\frac{10}{15}$ du bassin, pendant une heure : divisant donc 1, ou la capacité du bassin, par $\frac{10}{15}$,

Digitized by Google

on aura le nombre d'heures qu'il mettra à se remplir de cette manière, et l'on trouvera ainsi $\frac{15}{10}$ ou une heure et demie.

Les auteurs qui ont écrit sur l'Arithmétique ont multiplié et varié ces questions de beaucoup de manières, et ont érigé en règles les procédés qui servent à les résoudre; mais tous ces préceptes sont au moins inutiles, parce qu'une question de ce genre est toujours facilement résolue par celui qui sait développer les conséquences de l'énoncé, surtout lorsqu'il peut s'aider du secours de l'Algèbre; c'est pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

127. A l'instar des proportions qui sont composées de quatre nombres, dont les deux premiers se contiennent autant que les deux derniers, on a considéré l'assemblage de quatre nombres, tels que 2, 7, 9, 14, dont le deuxième surpasse le premier autant que le quatrième surpasse le troisième : ces nombres, qu'on peut appeler *équidifférents*, jouissent d'une propriété remarquable, analogue à celle de la proportion; car la somme des termes extrêmes 2 et 14 est égale à celle des moyens 7 et 9 (1).

Pour prouver cette propriété en général, il faut observer que le second terme est égal au premier, plus la différence, et que le quatrième est égal au troisième, plus

(1) Les Anciens avaient très-bien séparé la théorie des proportions des opérations de l'Arithmétique. Euclide donne cette théorie dans le cinquième livre de ses *Éléments;* et comme il applique les proportions aux lignes, c'est apparemment de là qu'elles ont pris dans la suite le nom de *proportions géométriques*, et qu'on a donné le nom de *proportion arithmétique* à l'assemblage des nombres équidifférents, dont on ne s'est occupé que beaucoup plus tard. Ces dénominations sont très-vicieuses : le mot de *proportion*, dans notre langue, a un sens déterminé qui ne convient nullement aux nombres équidifférents. D'ailleurs la proportion qu'on appelle *géométrique* n'est pas moins *arithmétique* que celle qui porte exclusivement ce nom. Lagrange, dans ses Leçons à l'École Normale, a rectifié le langage à cet égard, et j'ai suivi son exemple.

L'*équidifférence*, ou l'assemblage de quatre nombres équidifférents, ou enfin la *proportion arithmétique*, s'écrit ainsi : 2.7 : 9.14.

Digitized by Google

la différence; d'où il suit que la somme des extrêmes, composée du premier et du quatrième terme, sera égale au premier plus le troisième plus la différence. De même, la somme des moyens, composée du deuxième et du troisième terme, sera égale au premier plus la différence plus le troisième. Ces deux sommes étant composées des mêmes parties sont, par conséquent, égales.

J'ai supposé que le deuxième et le quatrième terme étaient plus grands que le premier et le troisième; le contraire pourrait avoir lieu comme dans les quatre nombres 8, 5, 15, 12; alors le second terme serait égal au premier moins la différence, et le quatrième serait égal au troisième moins la différence. En changeant le mot *plus* en *moins*, dans le raisonnement précédent, on prouverait encore que, dans le cas actuel, la somme des extrêmes est égale à celle des moyens.

Je ne pousserai pas plus loin cette théorie des nombres équidifférents, parce qu'elle ne peut être d'aucun usage pour le moment.

Règle d'Alliage.

128. Je n'omettrai point la *règle d'alliage*, dont le but est de trouver la valeur moyenne de plusieurs choses de même espèce, mais de prix différents; les exemples suivants la feront suffisamment connaître.

Un marchand a acheté plusieurs espèces de vins, savoir :

130 bouteilles qui lui reviennent	à	10 décimes chaque,
75	à	15,
231	à	12,
27	à	20;

et il les mêle ensuite : on demande à combien lui revient la bouteille du mélange. Il est aisé de voir qu'il n'y a qu'à évaluer ce que lui coûte la totalité de ce mélange,

Digitized by Google

combien elle forme de bouteilles, et à diviser ensuite le premier de ces résultats par le second pour avoir le prix cherché.

Or

les 130	bouteilles	à 10	décimes font	1300 décimes
75		à 15	font	1125
231		à 12	font	2772
27		à 20	font	540
donc... 463	bouteilles coûtent			5737 décimes.

Divisant 5737 par 463, le quotient 12,39 est le prix de la bouteille du mélange.

129. On se sert encore de la règle précédente pour prendre un milieu entre divers résultats donnés par l'expérience ou l'observation, et qui ne s'accordent point entre eux. S'il s'agissait, par exemple, de connaître exactement la distance de deux points assez éloignés, et qu'on la mesurât, quelque soin qu'on apportât dans cette opération, il y aurait toujours un peu d'incertitude dans le résultat, à cause des erreurs qu'on commet nécessairement dans la manière de poser les mesures à la suite les unes des autres.

Je suppose donc qu'on ait répété cette opération plusieurs fois de suite pour la vérifier, et que deux fois on ait trouvé $3794^m,48$, que trois autres mesurages aient donné $3795^m,27$, qu'on ait eu enfin un dernier résultat de $3793^m,115$: ces divers nombres n'étant point les mêmes, il est évident qu'il y a erreur dans quelques-uns d'entre eux, et probablement dans tous; et pour l'atténuer, voici comme on raisonne. Si l'on avait obtenu chaque fois la vraie mesure, la somme des résultats serait égale à six fois cette mesure, et il est visible que la même chose aurait encore lieu si les résultats obtenus péchaient les uns par défaut, les autres par excès, de manière que l'augmentation produite par l'addition des excès compensât ce qui

Digitized by Google

manque aux résultats moindres que la vraie valeur : on parviendrait donc, dans ce dernier cas, à la vraie mesure, en divisant la somme des résultats par leur nombre.

Ce cas est trop particulier pour espérer qu'il se rencontre fréquemment; mais il arrive presque toujours que les erreurs dans un sens détruisent une partie de celles qui sont dans l'autre, et celle qui reste, se trouvant répartie également sur chacun des résultats, est d'autant plus diminuée, que le nombre des résultats est plus grand.

D'après ces considérations, on opérera ainsi qu'il suit : On prendra

2 fois	3794,48	ou	7588,96
3 fois	3795,27	ou	11385,81
1 fois	3793,115	ou	3793,115
6 résultats donnant en tout			22767,885

Divisant 22767,885 par 6, on trouvera que la valeur moyenne de la distance demandée est $3794^{m},647$.

Au reste, c'est au calcul des probabilités qu'il faut avoir recours pour discuter et apprécier les avantages et les inconvénients de cette méthode; et ce sujet a occupé les plus grands géomètres de notre siècle.

De la comparaison des diverses mesures de même genre.

130. L'uniformité des mesures était depuis longtemps l'objet des vœux de tous les savants, lorsqu'on a établi en France le système décimal que j'ai exposé plus haut (100); mais ce système n'étant pas encore adopté par les nations étrangères, et succédant à un ancien système par lequel on a exprimé beaucoup de résultats numériques importants, on a souvent besoin de comparer avec les mesures décimales, soit les anciennes mesures françaises, soit les mesures étrangères : je vais, en conséquence, indiquer les moyens de faire cette comparaison.

Digitized by Google

Les données nécessaires sont les rapports des mesures à comparer. Ces rapports s'obtiennent en exprimant l'une des mesures par l'autre.

131. Les mesures linéaires les plus usitées en France étaient la *toise* et l'*aune*.

La toise se divise en 6 pieds,
Le pied se divise en 12 pouces,
Le pouce se divise en 12 lignes,
La ligne se divise en 12 points.

L'aune (de Paris) contient 3 pieds 7 pouces 10 lignes $\frac{5}{6}$. Je compare d'abord la toise au mètre.

Le mètre, déterminé définitivement, a été trouvé de 3 pieds 0 pouce 11 lignes 296.

Ce nombre étant réduit en fraction de la toise donne le rapport du mètre à la toise.

Pour faire cette réduction, il faut d'abord convertir les pieds en lignes, ce qui se fera en observant que, puisque le pied vaut 12 pouces, 3 pieds font 36 pouces; et comme le pouce vaut 12 lignes, on multipliera 36 par 12, ce qui donnera 432 pour la valeur de 3 pieds convertis en lignes, à quoi il faut ajouter les 11 lignes 296 de surplus, et il viendra 443 lignes 296.

D'un autre côté, la toise, composée de 6 pieds, contient 6 fois 12 pouces, ou 72 pouces, et 72 fois 12 lignes, ou 864 lignes. La toise contenant donc 864 lignes, tandis que le mètre en contient seulement 443,296, le rapport du mètre à la toise est celui des nombres 443,296 et 864, ou des nombres 443296 et 864000, mille fois plus grands que les précédents. La toise est donc les $\frac{864000}{443296}$ du mètre, fraction qui se réduit à $\frac{27000}{13853}$, en divisant ses deux termes par 32.

132. Il suit de là et du n° 75, que, pour convertir un nombre quelconque de toises en mètres, il faut le multiplier par la fraction $\frac{27000}{13853}$.

Digitized by Google

On demande, par exemple, combien 43 toises font de mètres; le résultat est $\frac{1161000}{13853}$: extrayant les entiers de cette fraction, il vient $83\frac{11201}{13853}$, et en réduisant en décimales la fraction qui accompagne l'entier, on a 83,80856.

Comme il suffit, pour les usages ordinaires, d'une réduction approchée, il est commode de convertir immédiatement en décimales la fraction $\frac{27000}{13853}$, ce qui donne pour la valeur de la toise 1^m,94904; et multipliant ce nombre par celui des toises proposées, on opérera sur-le-champ leur conversion en mètres.

133. Les pieds, les pouces, les lignes, dont le rapport avec la toise est connu, se convertissent facilement en parties décimales du mètre :

1°. Le pied étant la sixième partie de la toise vaudra la sixième partie de la fraction $\frac{27000}{13853}$, ou les $\frac{4500}{13853}$ du mètre, et en décimales, 0^m,32484, ou 3^{dm},2484.

2°. Le pouce étant la douzième partie du pied vaudra la douzième partie de la fraction $\frac{4500}{13853}$, ou les $\frac{375}{13853}$ du mètre, et en décimales, 0^m,02707, ou 2^{cm},707.

3°. La ligne étant la douzième partie du pouce vaudra la douzième partie de la fraction $\frac{375}{13853}$, ou les $\frac{125}{55412}$ du mètre, et en décimales, 0^m,00226, ou 2^{mm},26.

On obtiendrait de même la valeur du point.

134. Rien de plus aisé maintenant que de réduire en mètres et en parties décimales du mètre, un nombre quelconque de toises, pieds et pouces. Soient, par exemple, 13 toises 5 pieds 3 pouces 8 lignes.

Les	13 toises donnent	25,33752
Les	5 pieds donnent	1,62420
Les	3 pouces donnent	0,08121
Les	8 lignes donnent	0,01808
	Total.....	27,06101

135. L'aune de Paris, contenant 3 pieds 7 pouces

Digitized by Google

10 lignes $\frac{1}{6}$, réduite en lignes, revient à la fraction $\frac{3161}{5184}$ de la toise; et la toise étant les $\frac{27000}{13853}$ du mètre, l'aune sera les $\frac{3161}{5184}$ des $\frac{27000}{13853}$ du mètre, ce qui revient, en décimales, à $1^{m},18845$.

136. Le poids se mesurait autrefois en *livres, marcs, onces, gros, grains et fractions de grains.*

La livre est composée de 2 marcs,
Le marc est composé de 8 onces,
L'once est composée de 8 gros,
Le gros est composé de 72 grains.

On a trouvé, par des expériences très-délicates, que le kilogramme pesait 18827 grains. En convertissant ce nombre en fraction de la livre, comme je l'ai fait pour celui qui exprime le mètre par le pied, on aura le rapport de la livre au kilogramme, et l'on déduira de là les rapports des subdivisions de la livre avec les parties décimales du gramme.

On trouvera, 1°. que la livre est les $\frac{9216}{18827}$ du kilogramme, ou $0^{Kgr},48951$ en décimales;

2°. Que l'once, ou la seizième partie de la livre, vaut les $\frac{576}{18827}$ du kilogramme, ou $0^{Kgr},03059$ en décimales;

3°. Que le gros, ou la huitième partie de l'once, vaut les $\frac{72}{18827}$ du kilogramme, ou $0^{Kgr},00382$ en décimales;

4°. Que le grain, ou la soixante-douzième partie du gros, vaut le $\frac{1}{18827}$ du kilogramme, ou $0^{Kgr},00005$ en décimales.

Avec ces résultats, rien de plus facile que de convertir en mesures décimales un poids quelconque exprimé par les anciennes mesures. Soit pour exemple 23 livres 4 onces 5 gros 31 grains.

		Kgr
On a pour	23 livres,	11,25873
pour	4 onces,	0,12236
pour	5 gros,	0,01910
pour	31 grains,	0,00155
Total		11,40174

Digitized by Google

137. L'unité monétaire de l'ancien système était la livre tournois. La valeur du franc, donnée par la pièce de 5 francs, ayant été comparée à celle de la livre tournois, donnée par l'écu de 6 livres, il en est résulté que la valeur du franc est à celle de la livre tournois comme 81 est à 80. Pour convertir donc une somme de livres tournois en francs, il faudra en prendre les $\frac{80}{81}$, ou la multiplier par 0,98765.

Réciproquement, pour évaluer une somme de francs en livres tournois, il en faut prendre les $\frac{81}{80}$, ou la multiplier par 1,0125.

Si la somme à réduire était 100 francs, il viendrait 101,25 ou 101 livres $\frac{1}{4}$.

La livre tournois se divise en 20 sous, chaque sou en 12 deniers. Dans l'usage ordinaire, on confond la *livre seule* avec le franc. Par cette hypothèse, qui n'est qu'approchée, chaque sou vaut un $\frac{1}{2}$ décime ou 0,05; et un denier étant la douzième partie du sou vaut un $\frac{1}{12}$ de 0,05, ou 0,0041666, etc.

Pour faciliter les conversions des anciennes mesures en nouvelles, on a réuni, dans les tables placées à la fin de ce Traité, les résultats obtenus dans le n° 133, ainsi que dans le précédent, avec tous ceux qu'on trouverait en comparant de la même manière les mesures correspondantes de l'ancien système métrique et du système décimal. On y a joint aussi les rapports des principales mesures et monnaies étrangères avec celles du même système.

138. De même que, par le rapport de l'aune à la toise, j'ai comparé la première avec le mètre, de même aussi j'aurais pu comparer avec le mètre toutes les mesures étrangères dont le rapport avec nos anciennes est connu. L'exemple suivant, quoique fictif, suffira pour mettre en état d'appliquer la méthode à tous les cas qui peuvent se présenter, et donnera une idée de la *règle conjointe*,

Digitized by Google

qu'on pratique souvent dans les opérations du *change* des monnaies.

Supposé que 3 *livres* de France valent 32 *deniers sterling* d'Angleterre, que 240 deniers sterling valent 408 *deniers de gros* de Hollande, que 50 deniers de gros valent 190 *maravédis* d'Espagne: on demande combien 90 livres de France font de maravédis.

1°. Puisque 3 livres de France font 32 deniers sterling, la livre est les $\frac{32}{3}$ du denier sterling.

2°. Puisque 240 deniers sterling valent 408 deniers de gros, le denier sterling est les $\frac{408}{240}$ du denier de gros.

3°. Puisque 50 deniers de gros valent 190 maravédis, le denier de gros est les $\frac{190}{50}$ du maravédi.

On convertira donc la livre de France en maravédis, en prenant les $\frac{32}{3}$ des $\frac{408}{240}$ de $\frac{190}{50}$, ce qui donnera

$$\frac{32 \text{ par } 408 \text{ par } 190}{3 \text{ par } 240 \text{ par } 50}$$

pour le rapport de la livre au maravédi; et multipliant ce rapport par 90, on aura la valeur de 90 livres de France, exprimée en maravédis, c'est-à-dire

$$\frac{90 \text{ par } 32 \text{ par } 408 \text{ par } 190}{3 \text{ par } 240 \text{ par } 50}.$$

Ce nombre fractionnaire est susceptible d'une expression beaucoup plus simple; car le numérateur et le dénominateur ont des facteurs communs. Dans le premier, 90 et 190 sont divisibles par 10; il en est de même de 240 et de 50 dans le second, et la division étant effectuée, il viendra

$$\frac{9 \text{ par } 32 \text{ par } 408 \text{ par } 19}{3 \text{ par } 24 \text{ par } 5}.$$

Mais 32 au numérateur étant divisible par 8, ainsi que 24 au dénominateur, on aura

$$\frac{9 \text{ par } 4 \text{ par } 408 \text{ par } 19}{3 \text{ par } 3 \text{ par } 5};$$

Digitized by Google

et comme 3 par 3 font 9, on pourra supprimer ce facteur dans le numérateur et le dénominateur à la fois : il en résultera $\frac{4 \text{ par } 408 \text{ par } 19}{5}$ ou $6201\frac{3}{5}$ maravédis pour 90 livres de France.

Du Calcul des nombres complexes.

139. Les nombres qui contiennent à la fois des *toises, pieds, pouces, lignes, points,* des *livres* (de poids), *onces, gros* et *grains,* des *livres, sous* et *deniers,* se trouvant rapportés à des unités différentes, et leur expression étant composée de plusieurs parties, ils ont été nommés *nombres complexes ;* ceux qui n'en renferment qu'une seule sont appelés *incomplexes* (1). On effectue immédiatement sur les nombres complexes les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique, par des procédés que je vais rapporter ici, pour mettre en état de suivre les anciens calculs, quoiqu'il soit à désirer qu'on renonce tout à fait à des opérations que les décimales remplacent si heureusement.

Ce que je dirai sur les nombres complexes usités en France s'appliquerait sans peine à tous ceux qui peuvent résulter des mesures étrangères et de leurs subdivisions.

De l'Addition des nombres complexes.

140. L'addition des nombres complexes repose sur les mêmes principes que celle des nombres incomplexes : il s'agit toujours de réunir entre elles les parties de même valeur; et lorsqu'on en trouve assez pour former une ou

(1) Les nombres accompagnés de fractions décimales ne doivent pas recevoir cette dénomination, puisqu'on peut à vue les convertir en une seule espèce d'unité : $34^m,95$ par exemple reviennent à 3495 centimètres.

Digitized by Google

plusieurs parties d'un ordre supérieur, on retient ces dernières pour les joindre à la somme de celles qui sont écrites dans les nombres proposés, comme dans l'addition simple, on reporte les dizaines d'une colonne sur la suivante à gauche. On doit donc disposer les nombres complexes qu'on veut ajouter ensemble, de manière que leurs unités, ou parties de même valeur, soient dans une même colonne, et faire séparément la somme de chacune de ces colonnes, en se rappelant combien il faut d'unités ou de parties de chaque ordre pour composer celle de l'ordre immédiatement plus considérable.

En voici un exemple, sur des livres, sous et deniers :

984#	12s	8d
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5

En ajoutant d'abord les deniers entre eux, parce que ce sont les parties de moindre valeur, et en embrassant à la fois les unités et les dizaines de ces nombres, on trouve 29 deniers ; mais comme 12 font 1 sou, cette somme revient à 2 sous 5 deniers : on n'écrit donc que les 5 deniers, et l'on retient les 2 sous pour les porter à leur colonne.

Ici on ajoute séparément les unités et les dizaines. Les premières donnent 22, en y joignant les deux sous retenus sur les derniers ; on n'écrit que les deux unités, et l'on retient les deux dizaines pour la colonne suivante, dont la somme s'élève par ce moyen à 5 dizaines : mais comme la livre, composée de 20 sous, en contient 2 dizaines, on obtient le nombre de livres résultant des sous, en divisant celui des dizaines de sous par 2. On a 2 pour quotient, et 1 de reste qu'on écrit sous la colonne où l'on opère, tandis qu'on retient les 2 livres pour la suivante à

Digitized by Google

gauche. A partir de cette dernière, l'opération s'effectue comme celle des nombres incomplexes, et l'on trouve 2756# 12ˢ 5ᵈ.

141. Je ne réduirai point en règle ce procédé, qu'il est si aisé d'adapter à telles subdivisions de l'unité qu'on voudra; et, pour donner l'occasion de le faire, je mettrai ci-dessous un exemple en toises, pieds, pouces et lignes, qu'on vérifiera soi-même, en se rappelant que 12 points font 1 ligne, 12 lignes 1 pouce, 12 pouces 1 pied, 6 pieds 1 toise.

	34 toises	5 pieds	6 pouces	7 lignes	8 points
	16	3	2	5	6
	127	4	10	11	9
Somme...	179	1	8	0	11

De la Soustraction des nombres complexes.

142. Cette soustraction s'opère de même que pour les nombres incomplexes, en changeant seulement ce qui se rapporte à la subordination des unités, lorsqu'on est obligé d'emprunter, sur les parties de plus grande valeur, de quoi rendre possibles les soustractions partielles où le nombre inférieur surpasse le supérieur.

Soit pour exemple

	795#	3ˢ	0ᵈ
	684	17	4
Différence.....	110	5	8

Dans cette soustraction, il faut d'abord emprunter 1 sur la colonne des sous, ou 12 deniers, pour en ôter les 4 deniers du nombre inférieur; et l'on a pour reste 8 deniers. Pour la colonne des sous, où il n'en reste plus que 2 dans le nombre supérieur, il faut faire sur celle des livres, l'emprunt de 1 livre, ou 20 sous, pour obtenir 22 sous, dont en retranchant 17, il reste 5; alors

Digitized by Google

on passera à la colonne des livres, où l'on comptera le chiffre supérieur pour une unité de moins, et l'on achèvera l'opération suivant le procédé relatif aux nombres incomplexes.

L'exemple ci-dessous, pris dans les mesures de poids, achèvera d'éclaircir ce procédé:

	19 livres	0 marcs	4 onces	5 gros	37 grains
	4	1	3	6	49
Différence...	14	1	0	6	60

Pour faire les soustractions dans la colonne des grains, il faut emprunter 1 dans celle des gros, et se souvenir que cette unité vaut 72 grains, les joindre par la pensée aux 37 qui sont écrits dans le nombre supérieur, ce qui fait 109 grains; d'où retranchant 49, il reste 60. On continue la soustraction dans les autres colonnes, en comptant 1 once pour 8 gros, 1 marc pour 8 onces, 1 livre pour 2 marcs.

Je ferai remarquer, à cette occasion, combien la bigarrure qui se trouve dans les subdivisions des diverses unités doit apporter d'embarras dans les opérations sur les nombres complexes, et en particulier combien était peu commode la division du gros en 72 grains, qui conduisait toujours à des opérations partielles assez compliquées.

Je donnerai encore un exemple en toises et subdivisions de la toise, tant pour exercer le lecteur sur cette espèce de mesure, que pour montrer comment on s'y prend lorsqu'il manque dans le nombre le plus grand quelques-unes des parties contenues dans l'autre:

	16 toises	0 pieds	0 pouces	0 lignes	0 points
	4	3	6	8	5
Différence...	11	2	5	3	7

Pour faire la soustraction dans la colonne des points,

Digitized by Google

on ne peut emprunter que sur celle des toises, et on le fait en décomposant

1 toise en 5 pieds plus 11 pouces plus 11 lignes plus 12 points.

On conçoit ces nombres de pieds, de pouces, de lignes et de points respectivement placés dans leurs colonnes, pour en retrancher successivement chacun des nombres inférieurs correspondants, ce qui donne les restes écrits au-dessous. On passe ensuite à la colonne des toises, en comptant pour 1 de moins le chiffre des unités.

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction des nombres complexes.

143. La preuve de l'addition se fait encore par les mêmes principes que pour les nombres incomplexes; il faut seulement, en passant aux subdivisions de l'unité, substituer au rapport décimal la valeur de chaque partie à l'égard de celle qui la suit à droite. Soit, par exemple,

984 ℔	12 ʃ	8 ₰
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5
~~1122~~	~~22~~	~~0~~

On opère sur les livres, suivant la règle du n° 19, puis on convertit les 2 livres en dizaines de sous, ce qui donne 4 de ces dizaines, qui, jointes à celle qu'on trouve écrite dans la colonne, forment le nombre 5, dont on retranche les 3 unités de cette colonne; on place au-dessous le reste 2, que l'on compte pour des dizaines par rapport aux 2 unités de la colonne suivante. Il reste encore 2 sous qu'il faut convertir en deniers; on ajoute les 24 deniers qui en résultent, avec les 5 qui sont écrits, et

Digitized by Google

l'on a un total de 29, qu'il faut retrouver par l'addition des deniers de tous les nombres, puisque ce sont les parties de moindre valeur. C'est ce qui arrive en effet, et ce qui prouve que l'opération est exacte.

Je ne m'arrêterai point à exposer la preuve de la soustraction, puisqu'elle se fait par le moyen d'une addition (20), et qu'on a vu précédemment comment s'effectue celle des nombres complexes.

De la Multiplication des nombres complexes.

144. La multiplication des nombres complexes ne présente aucune difficulté, lorsqu'on possède bien la théorie des fractions; car d'abord on peut changer le multiplicande et le multiplicateur en nombres fractionnaires, au moyen des rapports de chaque subdivision de l'unité avec celle qui la précède, comme on l'a fait dans les n°s 131 et 136, pour les valeurs du mètre par rapport à la toise, et du kilogramme par rapport à la livre de poids.

Si l'on avait, par exemple, 15 livres 12 sous 4 deniers, on réduirait d'abord les livres en sous, en les multipliant par 20, et l'on aurait 300 à joindre aux 12 qui sont écrits, ce qui changerait le nombre proposé en 312 sous 4 deniers; on multiplierait encore les sous par 12 pour les convertir en deniers : on obtiendrait 3744, et en y ajoutant les 4 deniers écrits, il en résulterait 3748 deniers. Cela fait, on observerait que la livre contenant 20 sous, le sou 12 deniers, la livre contient 20 fois 12 ou 240 deniers; qu'ainsi 1 denier est $\frac{1}{240}$ de la livre, d'où il résulte que 3748 deniers font $\frac{3748}{240}$ de la livre.

S'il fallait multiplier ce nombre par 7 toises 4 pieds, on changerait de même 7 toises 4 pieds en 46 pieds, ou $\frac{46}{6}$ de toise; on ferait, d'après la règle du n° 76, le produit des fractions $\frac{3748}{240}$ et $\frac{46}{6}$, ce qui donnerait $\frac{172408}{1440}$; et,

Digitized by Google

en observant que l'unité du produit doit être de même espèce que celle du multiplicande (102), on évaluerait, comme il suit, cette fraction par la livre tournois et ses subdivisions :

172408	1440
2840	$119^{\#}\ 14^{s}\ 6\frac{2}{3}^{d}$
14008	
1048	
20	
20960^{s}	
6560	
800	
12	
9600	
960	

La partie entière du quotient de la division du numérateur par le dénominateur donnerait d'abord les livres tournois, puis on multiplierait le reste 1048 par 20, pour le convertir en sous; on diviserait le produit 20960 par le diviseur 1440, et le quotient 14 serait le nombre de sous qui doit accompagner celui des livres déjà trouvé. Le second reste 800 serait ensuite converti en deniers, en le multipliant par 12; enfin on diviserait le produit 9600 par le diviseur 1440, et l'on aurait 6 deniers à joindre aux deux premières parties du quotient avec la fraction $\frac{960}{1440}$ qui revient à $\frac{2}{3}$.

Cette dernière opération, qui peut s'appliquer à quelque espèce de mesure que ce soit, repose sur ce que tout nombre fractionnaire peut être considéré comme l'indication d'une division qu'on rend possible, en convertissant le numérateur en parties de plus en plus petites, ainsi qu'on l'a fait à l'égard des décimales, dans le n° 95.

145. Les procédés que l'on suit ordinairement dans la multiplication des nombres complexes, probablement

Digitized by Google

imaginés par des hommes qui ne s'en occcupaient que pour arriver au résultat, paraissent au premier coup d'œil moins simples, moins généraux que celui du numéro précédent, mais ils sont peut-être plus commodes dans la pratique; ils offrent d'ailleurs ce caractère ingénieux qu'on trouve dans toutes les inventions suggérées par le besoin, auxquelles on parvient comme par instinct, sans concevoir bien nettement l'étendue et l'ordre du sujet, que développent ensuite ceux qui se sont voués uniquement à la méditation.

Je suivrai la marche que les premiers arithméticiens ont tenue en commençant par des exemples. Soit la multiplication

	de	25#	12s
	par	16	
		150	
		25	
Produit pour 10 sous		8	
pour 2 sous		1	12
Produit total....		409	12

Ici le multiplicande seul est complexe: il s'agit de le répéter 16 fois, ce qu'on effectue à l'ordinaire sur la partie entière; puis on observe que, si l'on ajoutait 1 au multiplicande 25, le produit serait augmenté précisément du multiplicateur 16, et qu'il le serait de la moitié seulement, si l'on n'avait joint au multiplicande que la moitié de 1 livre. D'après cela, s'il y avait 10 sous à la suite des livres du multiplicande, il faudrait écrire au produit 8 unités, moitié du multiplicateur; mais au lieu de 10 sous il y en a 12 : il reste donc encore 2 sous dont il faut tenir compte; or ces deux sous, étant la cinquième partie de 10, ne doivent augmenter le produit que de la cinquième partie de ce qu'ont donné les 10 sous : on prendra, par conséquent, la cinquième partie des 8 livres

Digitized by Google

trouvées précédemment, pour l'écrire sous le produit, ce qui donnera 1 livre 12 sous. La somme de tous ces produits partiels sera le produit total demandé, savoir, 409 livres 12 sous.

146. En décomposant de même, en parties qui soient contenues exactement dans l'unité du multiplicande, ou les unes dans les autres, les subdivisions qui accompagnent les unités de la plus grande valeur, ou les *unités principales* du multiplicande, on n'a plus qu'à prendre des parties semblables sur le multiplicateur ou sur les produits déjà formés. Ces parties se nomment *aliquotes;* on en sentira bien l'usage par l'exemple que je vais donner :

		$34^{\#}$	19^{s} $3\frac{1}{3}^{d}$
		18	
		272	
		34	
pour	10 sous....	9	
pour	5 sous....	4	10
pour	4 sous....	3	12
pour	1 sou.....	0	18
pour	3 deniers..		4 6
pour	1 denier..		1 6
pour	$\frac{1}{3}$ de den..		0 6
	Total.....	$629^{\#}$	7^{s} 0^{d}

Après avoir formé les produits des unités principales du multiplicande par chaque chiffre du multiplicateur, on opère comme il suit à l'égard des subdivisions du multiplicande:

On décompose 19 sous en 10 sous plus 5 sous plus 4 sous.

Pour les 10 sous, on prend la moitié du multiplicateur;
Pour les 5 sous, la moitié du produit précédent;
Pour les 4 sous, le cinquième du multiplicateur.

Comme il faut passer de là à 3 deniers, qui ne sont que

Digitized by Google

le quart d'un sou, et, par conséquent, le seizième de 4 sous, il pourrait être un peu difficile de prendre à vue la seizième partie du produit de 4 sous. Pour éviter cet embarras, on en prend d'abord le quart, ce qui forme le produit que donnerait 1 sou, et puis on prend le quart de ce dernier : on a le produit relatif à 3 deniers; mais on a l'intention de barrer les chiffres du produit précédent, qui, n'ayant servi qu'à former celui-ci, ne doit pas faire partie du produit total (1). On obtient de même le produit relatif à $\frac{1}{3}$ de denier, en formant d'abord celui de 1 denier par le moyen de celui de 3, et l'on barre le produit de 1 denier. On réunit ensuite tous les autres produits partiels, et la somme est le produit demandé.

Voici encore un exemple sur la toise et ses subdivisions :

	6 toises	3 pieds	5 pouces	2 lignes
	5			
	30			
pour 3 pieds....	2	3		
pour 1 pied.....	~~0~~	~~5~~		
pour 3 pouces...		1	3	
pour 1 pouce ...		0	5	
pour 1 pouce ...		0	5	
pour 2 lignes ..		0	0	10
Total.....	32	5	1	10

On a formé le produit relatif à 1 pied pour faciliter le passage aux pouces, et l'on a écrit deux fois le produit de 1 pouce, au lieu de former tout d'un coup le produit de 2 pouces, en prenant le sixième de celui de 1 pied, parce qu'on avait besoin du produit de 1 pouce pour obtenir commodément celui de 2 lignes.

(1) Quelques arithméticiens donnent aux produits qu'ils ne cherchent que pour en trouver d'autres, la dénomination de *faux produits*, qui est assurément bien mauvaise.

Digitized by Google

147. Lorsque le multiplicateur seul est complexe, on décompose, de même que précédemment, en parties aliquotes de l'unité principale, les subdivisions qu'il contient, et l'on effectue sur le multiplicande les opérations qu'elles indiquent. C'est dans ce cas qu'il est important de distinguer, par l'état de la question, lequel des deux nombres proposés doit être pris pour multiplicande; car, en déterminant la nature des unités du produit cherché, il fixe les rapports des subdivisions auxquelles il faut descendre, en prenant les produits relatifs aux parties aliquotes, et sur lesquels on pourrait se tromper beaucoup, puisque les subdivisions du multiplicande et du multiplicateur suivent des lois différentes, lorsque ces deux nombres ne sont pas de même espèce. Soit pour exemple

	$793^{\#}$		
	9^{marcs}	3^{onces}	5^{gros} $7\frac{1}{2}^{\text{grains}}$
	$7137^{\#}$	ʃ	℞
pour 2 onces. ..	198	5	
pour 1 once.....	99	2	6
pour 4 gros.....	49	11	3
pour 1 gros.....	12	7	$9\frac{3}{4}$
pour 12 grains....	~~2~~	~~1~~	$\cancel{3}\ \frac{5}{8}$
pour 6 grains....	1	0	$7\frac{11}{16}$
pour 1 grain.....	0	3	$5\frac{29}{96}$
pour $\frac{1}{2}$ grain.....	0	1	$8\frac{125}{192}$
	7497	12	$4\frac{99}{192}$

Dans cet exemple, on a pris :

Pour 2 onces, $\frac{1}{4}$ du multiplicande;
Pour 1 once, $\frac{1}{2}$ du produit précédent;
Pour 4 gros, $\frac{1}{2}$ du produit de 1 once;
Pour 1 gros, $\frac{1}{4}$ du produit précédent.

Mais comme le gros contient 72 grains, on a d'abord pris

Digitized by Google

le sixième du produit relatif à 1 gros, afin d'avoir le produit relatif à 12 grains, et l'on a pris ensuite :

Pour 6 grains, $\frac{1}{2}$ du produit de 12;
Pour 1 grain, $\frac{1}{6}$ du produit précédent;
Pour $\frac{1}{2}$ grain, $\frac{1}{2}$ du produit précédent.

Ces divers produits sont accompagnés de fractions qu'il faut ajouter ensemble, ce qui s'opère facilement par le second procédé du n° 69, parce que le plus grand des dénominateurs contenant tous les autres, on peut convertir toutes les fractions dans l'espèce de la dernière : on trouve, pour leur somme, $\frac{483}{193}$ ou $2\frac{99}{192}$. En joignant ces 2 deniers à ceux qui sont écrits, et continuant l'addition des autres colonnes, on a le produit total.

148. Enfin, lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont tous deux complexes, après avoir fait les produits des unités principales du multiplicande par celles du multiplicateur, on prend d'abord, seulement sur les unités principales du multiplicateur, les parties aliquotes dans lesquelles se décomposent les subdivisions du multiplicande, puis on décompose les subdivisions du multiplicateur en parties aliquotes de son unité principale, et l'on effectue sur tout le multiplicande les opérations qu'elles indiquent.

Pour sentir l'exactitude de ce procédé, il suffit d'observer que le produit cherché doit renfermer trois parties, savoir : le produit des unités principales du multiplicande par celles du multiplicateur, celui des subdivisions du multiplicande par les unités principales du multiplicateur, et enfin le produit de tout le multiplicande par les subdivisions du multiplicateur.

En effet, on peut ramener cette opération à la multiplication de deux facteurs composés d'un entier joint à une fraction; et si l'on avait, par exemple, $8\frac{2}{3}$ à multiplier par $6\frac{5}{7}$, le produit se composerait évidemment de 8 et

Digitized by Google

de $\frac{2}{3}$, répétés chacun 6 fois, plus des $\frac{5}{7}$ de tout le multiplicande.

149. L'exemple suivant éclaircira ces principes, et en fera connaître l'application :

	84^{liv}	6^{sous}	3^{den} $\frac{1}{3}$	
	15to	4^{pi}	6^{po}	8^{lig}
	$420^{liv.}$	$^{sous.}$	$^{den.}$	
	84			
pour 5 sous...	3	15		
pour 1 sou....	0	15		
pour 3 deniers.	0	3	9	
pour 1 denier..	0	1	3	
pour $\frac{1}{3}$ denier..	0	0	5	
pour 3 pieds..	42	3	1	$\frac{2}{3}$
pour 1 pied...	14	1	0	$\frac{5}{9}$
pour 6 pouces.	7	0	6	$\frac{5}{18}$
pour 1 pouce..	1	3	5	5
			108	
pour 6 lignes..	0	11	8	$\frac{113}{216}$
pour 2 lignes..	0	3	10	$\frac{545}{648}$
	1328	14	5	$\frac{295}{324}$

On a d'abord pris sur les 15 unités principales du multiplicateur les parties aliquotes dans lesquelles se décomposent les 6^s 3^d du multiplicande, et l'on y a joint le $\frac{1}{3}$ du produit auxiliaire de 1 denier; puis on a pris ensuite, sur tout le multiplicande, les parties aliquotes que forment les 4^{pi} 6^{po} 8^{li} du multiplicateur, en faisant le produit auxiliaire de 1 pouce pour passer aux lignes : en réunissant les fractions, on a obtenu 2 entiers et $\frac{560}{648}$, fraction dont la plus simple expression est $\frac{70}{81}$; on a joint ces entiers à la somme de la colonne des deniers, et l'on a achevé l'addition suivant la règle du n° 140.

150. Le plus souvent on néglige les fractions qui compliquent assez le calcul, lorsqu'on veut en tenir compte;

Digitized by Google

mais aussi le résultat peut se trouver en défaut de quelques unités sur la colonne des subdivisions de moindre valeur. On éviterait cette erreur et l'embarras que donne l'addition des fractions ordinaires, en convertissant en dixièmes le reste que laissent, dans la formation de chaque produit partiel, les dernières subdivisions du produit précédent; et tant qu'il n'y aura pas dix de ces produits, on sera sûr d'avoir le résultat exact jusqu'aux dernières unités.

Voici un exemple relatif à l'aune.

Il s'agit de trouver ce qu'on doit payer pour 15 aunes $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{16}$ d'une étoffe, le prix de l'aune étant de 42^{l} 17^{s} 11^{d}.

		42^{liv}	17^{sous}	11^{den}	
		15	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$	
		$210^{liv.}$	sous.	den.	
		42			
pour 10 sous...		7	10		
pour 5 sous...		3	15		
pour 2 sous...		1	10		
pour 6 deniers.			7	6	
pour 3 deniers.			3	9	
pour 2 deniers.			2	6	
pour $\frac{1}{2}$ aune...		21	8	11,	5
pour $\frac{1}{4}$ aune...		10	14	5,	7
pour $\frac{1}{16}$ aune...		2	13	7,	4
Produit total		678	5	9,	6

On opère sur le multiplicande comme dans les exemples précédents; et les $\frac{3}{4}$ qui sont écrits dans le multiplicateur se décomposant en $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, on prend la $\frac{1}{2}$ de tout le multiplicande, puis pour $\frac{1}{4}$, la $\frac{1}{2}$ du produit précédent, puis enfin pour $\frac{1}{16}$, le $\frac{1}{4}$ du produit précédent. Dans le produit total on barre le chiffre des dixièmes de denier, parce qu'il n'est pas toujours exact, à cause des fractions de dixièmes qu'on a négligées.

Digitized by Google

151. Tout ce qu'on vient de voir sur la multiplication des nombres complexes, étant réduit en règle, peut s'énoncer ainsi : *Multiplier d'abord les unités principales du multiplicande par celles du multiplicateur; décomposer les subdivisions du multiplicande en parties aliquotes de son unité principale, ou des parties aliquotes qui les précèdent; évaluer ces fractions sur les unités principales du multiplicateur seulement; décomposer ensuite les subdivisions du multiplicateur en parties aliquotes de son unité principale ou des parties aliquotes qui les précèdent, et évaluer ces fractions sur tout le multiplicande. Lorsque la fraction à évaluer sera trop petite à l'égard de celle à laquelle on la rapporte, on en facilitera le calcul en prenant une partie aliquote intermédiaire pour former un produit auxiliaire, duquel on déduira la partie aliquote cherchée, et dont on barrera ensuite les chiffres pour ne pas les comprendre dans l'addition des produits partiels qui doivent composer le produit total.*

De la Division des nombres complexes.

152. Il est très-important, pour opérer la division des nombres complexes, de faire attention à la nature des unités du quotient, puisque de là dépend la conversion des restes dans les subdivisions de ces unités; mais l'examen attentif de la question ne laisse jamais de doute à cet égard, surtout lorsqu'en considérant le dividende comme un produit, on détermine quels ont dû être le multipliplicande et le multiplicateur, ainsi qu'on l'a fait dans le n° 105.

On rencontrera de cette manière deux cas différents : dans l'un, le dividende et le diviseur étant de natures diverses, le quotient doit être de la même espèce que le dividende; dans l'autre, le dividende et le diviseur étant

Digitized by Google

de la même espèce, le quotient doit être d'une espèce différente. L'opération relative à ce dernier cas étant plus simple que pour le premier, je vais d'abord m'en occuper.

153. Voici une question qui mène à ce cas : Le prix d'une toise d'ouvrage étant 36 livres 15 sous 6 deniers, on demande combien on fera du même ouvrage pour 1689 livres 17 sous. Ici le dividende 1689 livres 17 sous est composé, avec 36 livres 15 sous 6 deniers, de la même manière que le nombre qui mesure l'ouvrage cherché, est composé avec la toise et ses subdivisions; ainsi le quotient doit être exprimé par ces dernières mesures.

Pour l'obtenir, on considère que sa valeur ne doit point changer lorsque l'on convertit le dividende et le diviseur en parties de même valeur, puisque des fractions de même dénominateur donnent pour quotient celui de leurs numérateurs; mais, en réduisant en même temps le dividende et le diviseur en deniers, qui sont les parties de moindre valeur qu'ils contiennent, on rendra ces nombres incomplexes.

Le dividende 1689 livres 17 sous donne 405564 deniers, et le diviseur 36 livres 15 sous 6 deniers en produit 8826; alors on regarde le dividende comme s'il était des toises, et le diviseur comme un nombre abstrait, puisque, si la toise ne coûtait que 1 denier, on en aurait 405564, et que coûtant 8826 deniers, il n'en doit être fait que la 8826e partie du premier nombre. On établit donc ainsi l'opération :

Digitized by Google

405564	8826
52524	45 toises 5 pieds 8 pouces $5\frac{6270}{8826}$ lignes
8394	
6	
50364	
6234	
12	
12468	
6234	
74808	
4200	
12	
8400	
4200	
50400	
6270	

Après avoir obtenu les unités principales du quotient, on multiplie par 6 le reste 8394 toises pour le convertir en pieds, ce qui donne 50364; on continue la division, et l'on place le quotient au rang des pieds; on multiplie par 12 le reste 6234 de cette dernière opération pour le convertir en pouces; on divise le produit 74808 par le diviseur, et l'on obtient le nombre de pouces à écrire au quotient; on multiplie encore le reste 4200 par 12, pour le convertir en lignes: la division du produit 50400 par le diviseur donne le nombre de lignes à écrire au quotient, et en s'arrêtant là, on termine ce quotient par la fraction $\frac{6270}{8826}$ qu'on réduit à sa plus simple expression. Le résultat final de l'opération est 45 toises 5 pieds 8 pouces $5\frac{1045}{1471}$ lignes.

La forme de ce procédé demeurerait la même quand les nombres proposés et leur quotient se rapporteraient à des unités de toute autre espèce.

Digitized by Google

154. Lorsque le quotient doit être de même espèce que le dividende, et que le diviseur est incomplexe, l'opération s'effectue comme celle du n° **144**.

Par exemple, 27 onces d'un métal ont coûté 169 livres 11 sous 4 deniers : on demande à combien revient l'once. Voici l'opération :

$$
\begin{array}{l|l}
169^{\text{liv}}\ 11^{\text{s}}\ 4^{\text{d}} & 27 \\
\hline
\quad 7 & 6^{\text{liv}}\ 5^{\text{s}}\ 7\tfrac{7}{27}{}^{\text{d}} \\
\quad 20 & \\
\hline
140 & \\
\quad 11 & \\
\hline
151 & \\
\quad 16 & \\
\quad 12 & \\
\hline
\quad 32 & \\
16 & \\
\hline
192 & \\
\quad 4 & \\
\hline
196 & \\
\quad 7 &
\end{array}
$$

Lorsqu'on est parvenu aux 6 livres qui doivent entrer dans le quotient, on convertit le reste 7 en sous, et l'on y joint les 11 qui sont écrits dans le dividende, puis on divise le résultat 151 par le diviseur 27 : on a 5 sous au quotient; on multiplie le reste 16 par 12 pour le convertir en deniers; on y joint les 4 du dividende; on divise le total 196 par le diviseur 27; on a pour quotient 7 deniers et la fraction $\frac{7}{27}$: le résultat complet est donc 6 livres 5 sous 7 $\frac{7}{27}$ deniers.

155. Enfin, quand le dividende et le diviseur sont tous deux complexes et d'espèces différentes, il faut convertir le dernier en fraction, comme on l'a indiqué dans le n° **144**; et alors la règle donnée pour les fractions dans le

Digitized by Google

n° 79 conduit à multiplier le dividende par le dénominateur du diviseur, et à diviser le produit qui peut être un nombre complexe, par le numérateur du diviseur, qui est nécessairement incomplexe. Voici un exemple :

36 toises 5 pieds 6 pouces 8 lignes d'ouvrage ayant été payés 1374 livres 12 sous 4 deniers, en déduire le prix de la toise.

Le diviseur, converti dans les dernières subdivisions de son unité principale, produit 31904 lignes ; et la toise contenant 864 lignes, on a $\frac{31904}{864}$ de toise pour la fraction qui le représente.

En multipliant d'abord le dividende 1374 livres 12 sous 4 deniers par 864, d'après le procédé du n° 146, on trouve 1 187668 livres 16 sous et l'on n'a plus qu'à diviser, comme dans le numéro précédent, le nombre complexe 1 187668 livres 16 sous par le nombre incomplexe 31904, ce qui donne pour quotient 37 livres 4 sous 6 $\frac{318}{997}$ deniers.

156. Il est à propos de remarquer que le dénominateur de la fraction que l'on obtient d'abord pour représenter le diviseur, est le nombre de parties de la plus petite valeur, contenues dans l'unité principale, en sorte qu'on peut énoncer ainsi la règle précédente : *Pour diviser un nombre complexe par un autre nombre complexe, il faut convertir le diviseur en parties de la plus petite valeur, multiplier le dividende par le nombre de parties de cette valeur contenues dans l'unité principale du diviseur, et diviser le second résultat par le premier.*

Cette règle s'appliquerait au cas développé dans le n° 153, si le dividende ne renfermait aucune partie de moindre valeur que la dernière du diviseur ; car multiplier alors le dividende par le nombre des parties de cette valeur contenues dans son unité principale, c'est le convertir dans ces parties.

157. On ne doit pas négliger les abréviations que peut

Digitized by Google

offrir la conversion du diviseur en fraction, et la réduction de celle-ci à sa plus simple expression; il en résulte souvent plus de facilité et de netteté dans les calculs.

La pratique réitérée de ces opérations suggère aussi des procédés particuliers qui simplifient le calcul, et que je ne saurais indiquer ici; je me bornerai à montrer comment on convertit sur-le-champ les sous en livres.

Comme il s'agit pour cela de diviser par 20 le nombre de sous proposé, on le divise d'abord par 10, en séparant un chiffre sur sa droite, puis on prend la moitié de ceux qui sont à gauche, ce qui divise par 2, et donne par conséquent des livres. Lorsqu'il reste une unité, elle représente une dizaine de sous, et il faut la joindre au chiffre séparé sur la droite, qui exprime des sous.

C'est ainsi que 3579 sous produisent 357,9, puis $178^{\text{liv}}\,19^{\text{s}}$.

158. La comparaison des procédés que je viens de présenter successivement, est sûrement la meilleure preuve qu'on puisse donner de l'avantage que procureront les nouvelles mesures lorsqu'elles seront adoptées; et quelque habitude qu'on ait du calcul des nombres complexes, on ne pourrait s'empêcher de sentir toute la commodité du calcul décimal, si l'on ne continuait pas à se servir des anciennes mesures, ce qui exige, pour chaque résultat, la conversion de ces mesures dans les nouvelles: opération toujours longue, absolument étrangère au nouveau système métrique, et qu'on s'obstine malgré cela à regarder comme inséparable de l'usage de ce système.

De quelques moyens employés pour abréger les calculs arithmétiques.

159. Lorsque l'on doit multiplier l'un par l'autre deux nombres très-considérables, il est commode de former d'abord les produits du multiplicande par chacun des

Digitized by Google

chiffres du multiplicateur qui ne sont pas répétés. Soient pour exemple les nombres 2937487541 et 67431456. J'observe que le multiplicateur ne contient que les chiffres 1, 3, 4, 5, 6, 7; en multipliant successivement le multiplicande par chacun de ces chiffres, je forme la Table

1	2937487541
2	5874975082
3	8812462623
4	11749950164
5	14687437705
6	17624925246
7	20562412787

dans laquelle je prends les produits du multiplicande par les chiffres 6, 5, 4, 1, 3, 4, 7 et 6 du multiplicateur, pour les placer dans le rang qu'ils doivent occuper, ainsi qu'on le voit ci-dessous, et je n'ai plus qu'une simple addition à effectuer :

```
      17624925246
     14687437705.
    11749950164..
   2937487541...
  8812462623....
 11749950164.....
20562412787......
17624925246.......
-----------------
198079061871489696
```

En suivant ce procédé, on ne peut avoir au plus que 9 produits à former, et le reste de l'opération se réduit à une simple addition.

160. On ramène la division à de simples soustractions, en faisant d'abord le produit du diviseur par les 9 premiers nombres. En effet, si l'on avait 4539947812346 à diviser par 73809, et qu'on formât une Table contenant les multiples du diviseur, savoir:

Digitized by Google

1	73809
2	147618
3	221427
4	295236
5	369045
6	442854
7	516663
8	590472
9	664281

on pourrait opérer comme il suit :

```
453994781 2346 | 73809
442854.......  | 61509406 64892/73809
-------------
 111407......
  73809......
 ----------
  375988.....
  369045.....
  ----------
    694312...
    664281...
    --------
     300313..
     295236..
     --------
       507746
       442854
       ------
        64892
```

On cherche dans la Table le multiple le plus approchant du nombre exprimé par les six premiers chiffres du dividende; ce multiple, répondant à 6, donne 6 pour le premier chiffre du quotient. En le retranchant du dividende partiel, abaissant un chiffre de plus, et cherchant quel est le multiple le plus approchant du nouveau dividende partiel, on trouve 1 pour le second chiffre du quotient. On poursuit ainsi l'opération jusqu'à la fin, par des soustractions.

161. Quand on emploie les décimales pour arriver à

Digitized by Google

un certain degré d'approximation, on peut abréger sensiblement la multiplication, en opérant comme on va le voir. Je suppose qu'il s'agisse de connaître, à moins d'un millième d'unité près, le produit des nombres 45,6259573 et 28,63549.

On observera qu'il est inutile de faire entrer dans le produit total les chiffres qui, dans les produits partiels, représentent des décimales d'un ordre plus élevé que les 100000es, parce que la somme des colonnes qui renferment les décimales ultérieures, et les retenues qui en résultent, ne peuvent influer sur les millièmes; et alors, pour avoir un produit composé de cent-millièmes en partant du chiffre situé sur la gauche du multiplicateur, qui exprime ici des dizaines, il suffit de commencer la multiplication au chiffre 7 des millionièmes du multiplicande. Les chiffres qui suivent celui des dizaines vers la droite, exprimant des unités de dix fois en dix fois plus petites, on ne commencera à leur égard la multiplication que sur les chiffres 5, 9, 5, etc., qui suivent le chiffre 7 vers la gauche, parce que les cent-millièmes 5 du multiplicande, multipliés par les unités 8 du multiplicatëur, donneront des cent-millièmes, de même que les dix-millièmes du multiplicande par les dixièmes du multiplicateur, de même que les millièmes du multiplicande par les centièmes du multiplicateur, et ainsi de suite.

Pour ne pas se tromper dans le commencement de chaque multiplication partielle, on écrit sous le multiplicande les chiffres du multiplicateur dans un ordre inverse, en plaçant celui des dizaines du second sous les millionièmes du premier, comme on le voit ci-après :

Digitized by Google

```
456259573
  9453682
---------
 91251914
 36500760
 .2737554
 ..136875
 ...22810
 ....1824
 .....405
---------
 130652142
```

De cette manière, chaque chiffre du multiplicateur se trouve placé sous le chiffre du multiplicande par lequel on doit commencer la multiplication; en sorte qu'on néglige ceux qui sont à la droite, et l'on écrit tous les produits dans les mêmes colonnes, puisqu'ils commencent tous par des unités de même ordre. En les réunissant, et séparant cinq décimales, puisque la dernière doit être des cent-millièmes, on trouve 1306,52142; effaçant les deux derniers chiffres, on a 1306,521, résultat qui s'accorde jusqu'aux millièmes avec celui qu'on aurait obtenu par la multiplication effectuée à l'ordinaire, et qui serait 1306,521644004577.

S'il arrivait que l'un des facteurs n'eût pas assez de chiffres pour établir la correspondance comme ci-dessus, on y suppléerait en mettant des zéros à la suite de ce facteur. Pour obtenir avec deux décimales, par exemple, le produit des nombres 54,236 et 532,27, il faut les écrire ainsi :

```
 54236000
    72235
---------
 271180000
  16270800
   1084720
    108472
     37961
---------
 288681953
```

Digitized by Google

On trouve pour le produit demandé 28868,20, en ajoutant une unité au dernier chiffre, parce que les deux qu'on supprime surpassent la moitié de cette unité, c'est-à-dire 50.

C'est une règle générale, lorsqu'on néglige quelques décimales, d'augmenter toujours de l'unité la dernière que l'on conserve, lorsque celles qu'on supprime surpassent la moitié de l'unité du dernier rang qu'on laisse subsister. Pour en apercevoir la raison, il suffit d'observer que 34,546, par exemple, est plus près de 34,55 que de 34,54.

Le procédé de la division est susceptible d'une abréviation analogue; mais comme elle exige un plus grand nombre de précautions particulières pour être employée avec sûreté, je ne m'y arrêterai pas.

162. On a vu, dans les n°s 60, 69, le parti qu'on peut tirer de la décomposition des nombres en facteurs, pour simplifier les calculs relatifs aux fractions : il est donc important de savoir opérer cette décomposition. L'exemple suivant montrera comment on y parvient.

Soit le nombre 360; je le divise d'abord par 2, et j'ai pour quotient 180; je divise ce quotient par 2, et il vient 90, qui se divise encore par 2, et qui donne 45 : ainsi je vois déjà que 360 est égal à 2 par 2 par 2 par 45. Le nombre 45 n'étant plus divisible par 2, je le divise par 3, et j'ai 15, que je divise encore par 3, et qui donne 5, nombre premier qui ne peut être divisé que par lui-même ou par l'unité : 45 est donc égal à 3 par 3 par 5, et, par conséquent, 360, à

2 par 2 par 2 par 3 par 3 par 5.

Ces six facteurs, étant des nombres premiers, sont les *facteurs simples* du nombre 360. Il est visible que tout nombre qui n'est pas premier peut toujours ainsi se décomposer en un certain nombre de facteurs simples ou premiers.

Digitized by Google

Pour former tous les diviseurs du nombre proposé, on écrit le quotient qui répond à chaque facteur, et ce facteur, sur deux colonnes, ainsi que le montre la Table ci-dessous :

360	1	1											
180	2	2											
90	2	4											
45	2	8											
15	3	3	6	12	24								
5	3	9	18	36	72								
1	5	5	10	15	20	30	40	45	60	90	120	180	360

Maintenant on voit à la troisième ligne que le nombre proposé a été divisé deux fois de suite par 2 : il est donc divisible par le produit 2 par 2 ou par 4, que l'on écrira à côté de 2, sur la troisième ligne. Le quotient 90 étant de nouveau divisé par 2, le nombre proposé sera, par conséquent, divisible par 2 fois 4 ou par 8 : on écrira donc 8 à côté de 2 sur la quatrième ligne. Le quotient 45 écrit à la tête de cette ligne étant ensuite divisé par 3, le nombre proposé sera évidemment divisible par les produits de 3 multiplié par chacun des diviseurs précédents : on formera donc, sur la cinquième ligne, les nouveaux diviseurs composés 6, 12, 24. Continuant ainsi de multiplier le facteur simple de chaque ligne par tous les diviseurs qui le précèdent, en observant de ne pas écrire deux fois le même, on aura tous les diviseurs du nombre proposé.

163. Lorsqu'on est conduit par le calcul à une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont un peu grands, et n'ont cependant aucun facteur commun, on cherche des valeurs approchées de cette fraction qui soient exprimées par des nombres plus simples, afin de pouvoir s'en former une idée.

Si l'on a, par exemple, le nombre fractionnaire $\frac{1103}{887}$, on en extrait d'abord les entiers, et il vient 1 et $\frac{216}{887}$.

Digitized by Google

Maintenant, pour se former une idée plus simple de la fraction $\frac{216}{887}$, on cherche à la comparer à une partie de l'unité, afin de n'avoir à envisager qu'un seul terme, et, pour cela, on divise ses deux termes par 216; on trouve 1 pour le quotient du numérateur, et $4\frac{23}{216}$ pour celui du dénominateur : ce dernier quotient, qui se trouve compris par conséquent entre 4 et 5, apprend ainsi que la fraction $\frac{216}{887}$ est entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$. En s'arrêtant à ce point, on voit que la seconde valeur approchée de l'expression $\frac{1103}{887}$ est 1 et $\frac{1}{4}$ ou $\frac{5}{4}$, mais que cette valeur est trop forte; car la vraie valeur serait égale à 1 plus 1 divisé par 4 et $\frac{23}{216}$, ce qui s'écrit ainsi : $\frac{1}{4\frac{23}{216}}$.

Pour se former une idée exacte de l'expression $\frac{1}{4\frac{23}{216}}$, il faut la considérer comme indiquant le quotient de l'entier 1 divisé par l'entier 4 accompagné de la fraction $\frac{23}{216}$.

Si l'on divise les deux termes de $\frac{23}{216}$ par 23, le quotient sera $\frac{1}{9\frac{9}{23}}$; négligeant les $\frac{9}{23}$ qui accompagnent l'entier 9, il viendra $\frac{1}{9}$ seulement au lieu de $\frac{23}{216}$, et, par conséquent, $\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ sera une troisième valeur approchée de $\frac{1103}{887}$, valeur qui sera trop faible, parce que 9 étant moindre que le vrai quotient de 219 par 23, la fraction $\frac{1}{9}$ sera plus grande que celle qui doit accompagner 4, et que, par conséquent, le diviseur $4\frac{1}{9}$ sera plus grand que le diviseur exact $4\frac{23}{216}$, et le quotient $\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ plus petit que le véritable.

En réduisant l'entier 4 avec la fraction qui l'accompagne, et faisant la division suivant le procédé du n° 80, il vient $\frac{9}{37}$; et l'on a 1 et $\frac{9}{37}$ ou $\frac{46}{37}$ pour la troisième valeur approchée de $\frac{1103}{887}$.

L'expression exacte de cette valeur étant

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{9}{23}}},$$

Digitized by Google

si l'on divise les deux termes de $\frac{9}{23}$ par 9, on aura

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}};$$

négligeant la fraction $\frac{5}{9}$, il restera

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2}}},$$

valeur trop forte : car la fraction $\frac{1}{2}$ étant plus grande que $\frac{1}{2\frac{5}{9}}$ dont elle tient la place, elle formera, en se joignant à 9, un dénominateur trop grand; la fraction à joindre à 4 sera alors trop petite, et le dernier dénominateur, étant trop faible, rendra la dernière fraction trop forte.

En réduisant d'abord $9\frac{1}{2}$ en fraction, il viendra $\frac{19}{2} : \frac{1}{9\frac{1}{2}}$ sera donc $\frac{2}{19}$, et la valeur approchée deviendra $1\frac{1}{4\frac{2}{19}}$. Or $\frac{1}{4\frac{2}{19}}$ donne $\frac{19}{78}$; en y ajoutant l'unité, il vient $1\frac{19}{78}$, ou $\frac{97}{98}$ pour une quatrième valeur approchée de $\frac{1103}{887}$.

Reprenons l'expression

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}};$$

et divisons les deux termes de la dernière fraction $\frac{5}{9}$ par 5 : il vient

$$\frac{1}{1\frac{4}{5}} \text{ et } 1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1\frac{4}{5}}}}};$$

négligeant la fraction $\frac{4}{5}$, il restera

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1}}}},$$

Digitized by Google

et l'on verrait comme ci-dessus que cette valeur est plus faible que la valeur exacte.

La fraction $\frac{1}{2\frac{1}{1}}$ se réduit à $\frac{1}{3}$; puis la suivante $\frac{1}{9\frac{1}{3}}$ donnant $\frac{3}{28}$, celle d'après se change en $\frac{1}{4\frac{3}{28}}$, égale à $\frac{28}{115}$; en sorte que la cinquième valeur approchée est $1\frac{28}{115}$ ou $\frac{143}{115}$.

Divisant enfin par 4 les deux termes de la fraction $\frac{4}{5}$ qui a été négligée ci-dessus, j'ai pour quotient $\frac{1}{1\frac{1}{4}}$; et en supprimant d'abord la fraction $\frac{1}{4}$, j'obtiens la nouvelle valeur

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\frac{1}{1}}}}},$$

plus forte que la véritable.

Si l'on en réduit successivement tous les dénominateurs en fraction pour obtenir la fraction simple qu'elle représente, on trouvera

$$1\frac{47}{193} \text{ ou } \frac{240}{193}.$$

En restituant la fraction $\frac{1}{4}$ à côté du dernier dénominateur, on forme l'expression

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{1}{1\frac{1}{4}}}}}},$$

qui, étant réduite comme les précédentes, reproduit le nombre fractionnaire $\frac{1103}{887}$.

On opérerait de même sur toute autre fraction, et l'on en tirerait une suite de valeurs approchées, alternativement plus grandes et plus petites que sa véritable valeur, si c'est une fraction proprement dite, ou alternativement plus petites et plus grandes, si, comme dans l'exemple précédent, le numérateur surpasse le dénominateur.

Les développements que je viens de trouver pour l'expression $\frac{1103}{887}$ sont des *fractions continues*, que l'on peut, en général, définir ainsi : *des fractions dont le dénomi-*

Digitized by Google

nateur est composé d'un entier plus une fraction, laquelle a encore pour dénominateur un entier plus une fraction, et ainsi de suite. Cette espèce de fractions jouit de beaucoup de propriétés importantes, pour lesquelles je renvoie au *Complément des Éléments d'Algèbre.*

Sur l'application de l'Arithmétique à la Banque et au Commerce.

164. A en juger par le grand nombre de règles ou formules que renferment les Traités d'Arithmétique destinés aux banquiers et aux négociants, on croirait qu'il y a pour ces professions une arithmétique particulière, tandis que toute la difficulté de l'application des règles ordinaires ne repose que sur l'intelligence des termes techniques introduits par l'usage, et assez souvent sans nécessité. Quand ces termes sont bien expliqués, quelque calculateur que ce soit rendra toujours en nombre la véritable réponse aux diverses questions qu'on pourra lui proposer.

L'*escompte* et le *change* sont les opérations les plus usuelles de la banque : on a vu (120) comment l'escompte devrait s'effectuer d'après le but qu'on se propose ; mais les premiers qui l'ont pratiqué ont trouvé plus simple de prélever l'intérêt de la somme entière, comme si c'était cette somme même qu'ils avançassent. (*Voyez* la note de la page 92.)

En général, dans les transactions, toute somme dont on ne pourra disposer que dans un temps futur a une valeur réelle moindre que sa valeur nominale, à cause de l'intérêt qu'elle rapporte à compter du moment où on la possède, et, par conséquent, la jouissance anticipée d'une somme augmente sa valeur réelle. De là vient que, pour comparer des sommes payables à diverses époques, il faut tenir compte de l'intérêt qu'elles sont censées produire à celui qui en dispose. Les règles du n° 120 sont suffisantes pour cet objet, toutes les fois que l'intervalle de temps n'excède pas un an, et qu'on n'accumule pas l'intérêt

Digitized by Google

avec le capital : dans le cas contraire, il faut employer les formules relatives à l'*intérêt composé*, rapportées à la fin de mes *Éléments d'Algèbre*.

Le change, qui sert à éviter le transport du numéraire en compensant, les unes par les autres, les dettes que contractent réciproquement des négociants de divers pays, conduit à un calcul dont le but est toujours de trouver ce qu'une somme payable dans une place de commerce vaut dans une autre, soit par le rapport de deux sommes regardées comme équivalentes dans les monnaies de ces places, soit par une suite de rapports formés de sommes équivalentes, prises dans les monnaies de diverses places communiquant les unes avec les autres. Le n° 138 offre un exemple général dont les formules particulières ne diffèrent que par la suppression des facteurs qui, dans chaque cas, peuvent être communs au numérateur et au dénominateur des rapports comparés. Les sommes équivalentes qui forment ces rapports sont énoncées chaque jour dans les papiers publics, parce qu'elles varient suivant les circonstances; mais ces changements ne font rien à l'esprit du procédé désigné sous le nom de *règle conjointe* (1).

A l'égard des opérations de commerce, on trouve dans le n° 124 tout ce qu'il faut pour partager les bénéfices ou les pertes résultantes d'une association quelconque: les *droits de commission*, les *retenues*, les *bonifications*, etc., s'évaluant à *tant pour* 100, comme l'intérêt, se calculent de même; les *taxes*, les *impôts*, ont des rapports avec les valeurs des marchandises, ou sont établis sur l'unité, soit de poids, soit de volume, et peuvent se

(1) N'ayant en vue ici que l'opération arithmétique, je ne fais aucune distinction entre les papiers, les monnaies de compte et celles d'or et d'argent; mais il faut savoir que les rapports de ces dernières dépendent principalement de ceux des quantités de métal fin, c'est-à-dire d'or ou d'argent purs qu'elles contiennent, et que l'on détermine par une opération chimique nommée *essai*, qui fait connaître ce qu'on appelle le *titre*. (*Voyez* page 154.)

Digitized by Google

conclure, pour des quantités quelconques, au moyen des proportions et des fractions.

Enfin, la *tenue des livres* n'est que la manière de disposer les *états* des valeurs fournies et des valeurs reçues par le négociant, dans un ordre tel, qu'on puisse à chaque instant comparer les unes aux autres, pour en connaître la différence, et établir ainsi la *balance* entre ce qu'il a et ce qu'il doit.

Caractères usités pour désigner les anciennes mesures.

Pour les monnaies :

$^{\#}$ livre tournois, ^{s} sou, ^{d} denier (**137**).

Pour le temps :

^{j} jour, ^{h} heure, ^{m} minute, ^{s} seconde.

Pour les poids :

℔ livre, M marc, O ou ℥ once, G ou ʒ gros ou dragme, D ou ℈ denier ou scrupule, G grain (**136**).

Observation. — Le denier ou scrupule vaut le $\frac{1}{3}$ du gros, ou 24 grains.

Mesures de longueur :

^{to} toise, ^{pi} pied, ^{po} pouce, ^{lig} ligne, ^{pt} point (**131**).

Observation. — Les distances se mesurent quelquefois en pas ordinaires estimés $2\frac{1}{2}$ pieds, et en pas géométriques ou brasses de 5 pieds.

Dimensions exactes de la terre :

Le rayon de l'équateur est de 3 271 208 toises.

Le demi-axe, ou la distance du centre au pôle, est de 3 261 443 toises.

La distance du pôle à l'équateur, mesurée sur le méridien de Paris, est de 5 130 740 toises.

Le degré terrestre, qui en est la 90e partie, vaut donc 57 008 toises.

L'arc terrestre d'une minute, ou la 60e partie du degré, est donc d'environ 950 toises.

Digitized by Google

MESURES DE PARIS.

TABLES POUR LA CONVERSION DES MESURES ANCIENNES EN MESURES NOUVELLES, ET RÉCIPROQUEMENT.

TABLES POUR LA CONVERSION DES MESURES USUELLES EN MESURES NOUVELLES, ET RÉCIPROQUEMENT.

Digitized by Google

OBSERVATIONS

RELATIVES AUX TABLES DE CONVERSION DES MESURES ANCIENNES EN MESURES NOUVELLES, ET RÉCIPROQUEMENT.

Dans l'acception mathématique, le mètre (dix-millionième partie du quart de la circonférence de la Terre) vaut $0^{toise},513074$ ou $443^{lignes},295936$ etc.

D'après la loi, la valeur définitive du mètre est de $443^{lignes},296$.

Dans les sciences exactes, on fait usage du *mètre mathématique*, qui est de $443^{lignes},295936$ etc.

Mais, dans toutes les opérations administratives et commerciales, on doit employer le *mètre légal*, qui est de $443^{lignes},296$.

On a formé nos Tables de conversion, en prenant le mètre légal pour base de tous les calculs.

Un MÈTRE vaut $443^{lig},296$, ou $36^{po},9413333$, ou $3^{pi},0784444$, ou $0^{toise},513074074074$...

Une ligne vaut $2^{millim.},255829062$...
Un pouce vaut $2^{centim.},706994874 44$...
Un pied vaut $3^{décim.},248393849 28$...
Une toise vaut $1^{mètre},949036309568$...

Un MÈTRE CARRÉ vaut $1965 11^{lignes\ carrées},343616$, ou $1364^{pouces\ carrés},662108444$, ou $9^{pieds\ carrés},476820197 53$, ou $0^{toise\ carrée},263245005487$...

Une ligne carrée vaut $5^{millimètres\ carrés},088764758303$...
Un pouce carré vaut $7^{centimètres\ carrés},327821251956 32$...
Un pied carré vaut $10^{décimètres\ carrés},552062602817 0908$...
Une toise carrée vaut $3^{mètres\ carrés},798742537014152688$...

Un MÈTRE CUBE vaut $87112692^{lignes\ cubes},579598336$, ou $50412^{pouces\ cub.},437835415703$, ou $29^{pieds\ cub.},173864488087$, ou $0^{toise\ cube},135064187 4448$...

Une ligne cube vaut $11^{millimètres\ cubes},479383 4329$...
Un pouce cube vaut $19^{centimètres\ cubes},836374 57$...
Un pied cube vaut $34^{décimètres\ cubes},277255 26$...
Une toise cube vaut $7^{mètres\ cubes},403887 136$...

Ces mesures légales fondamentales conduisent aux mesures contenues dans les Tables (pages 143,..., 146).

La *virgule* de l'une de ces deux formes ,, est placée sur la droite du chiffre des unités.

Digitized by Google

Table pour convertir les mesures linéaires anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement.

Nos	Toises en mètres.	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en mètres.	Aunes en mètres.	Nos	Lieues terrestres en kilom.	Lieues marines en kilom.	Lieues de poste en kilom.
1	1,94904	0,32484	0,027070	0,002256	1,18845	1	4,4444	5,5556	3,89807
2	3,89807	0,64968	0,054140	0,004512	2,37689	2	8,8889	11,1111	7,79615
3	5,84711	0,97452	0,081210	0006767	3,56534	3	13,3333	16,6667	11,69422
4	7,79615	1,29936	0,108280	0,009023	4,75378	4	17,7778	22,2222	15,59229
5	9,74518	1,62420	0,135350	0,011279	5,94223	5	22,2222	27,7778	19,49036
6	11,69422	1,94904	0,162420	0,013535	7,13068	6	26,6667	33,3333	23,38844
7	13,64326	2,27388	0,189490	0,015791	8,31912	7	31,1111	38,8889	27,28651
8	15,59229	2,59872	0,216560	0,018047	9,50757	8	35,5556	44,4444	31,18458
9	17,54133	2,92355	0,243630	0,020302	10,69601	9	40,0000	50,0000	35,08265

Nos	Mètres en toises.	Mètres en pieds.	Mètres en pouces.	Mètres en lignes.	Mètres en aunes de Paris.	Nos	Kilomètres en lieues terrestres.	Kilomètres en lieues mar.	Kilomètres en lieues de poste.
1	0,51307	3,07844	36,9413	443,296	0,84143	1	0,225	0,18	0,25654
2	1,02615	6,15689	73,8827	886,592	1,68287	2	0,450	0,36	0,51307
3	1,53922	9,23533	110,8240	1329,888	2,52430	3	0,675	0,54	0,76961
4	2,05230	12,31378	147,7653	1773,184	3,36574	4	0,900	0,72	1,02615
5	2,56537	15,39222	184,7067	2216,480	4,20717	5	1,125	0,90	1,28269
6	3,07844	18,47067	221,6480	2659,776	5,04861	6	1,350	1,08	1,53922
7	3,59152	21,54911	258,5893	3103,072	5,89004	7	1,575	1,26	1,79576
8	4,10459	24,62755	295,5307	3546,368	6,73148	8	1,800	1,44	2,05230
9	4,61767	27,70600	332,4720	3989,664	7,57291	9	2,025	1,62	2,30883

Digitized by Google

Table pour convertir les mesures carrées anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement.

Nos	Toises carr. en mètres carr.	Pieds carr. en mètres carr.	Pouces carr. en mètres carr.	Lignes carr. en mètres carr.	Nos	Lieues terr. carr. en myriamèt. carr.	Lieues terr. carrées en myriares.	Arp. Eaux et F. en hect. ou per. ca. en ar.	Arp. de Pa. en hect. ou perc. carr. en ares.
1	3,798743	0,105521	0,00073278	0,000005089	1	0,1975309	19,75309	0,510720	0,341887
2	7,597485	0,211041	0,00146556	0,000010178	2	0,3950617	39,50617	1,021440	0,683774
3	11,396228	0,316562	0,00219835	0,000015266	3	0,5925926	59,25,) 26	1,532159	1,025660
4	15,194970	0,422083	0,00293113	0,000020355	4	0,7901234	79,01234	2,042879	1,367547
5	18,993713	0,527603	0,00366391	0,000025444	5	0,9876543	98,76543	2,553599	1,709434
6	22,792455	0,633124	0,00439669	0,000030533	6	1,1851852	118,51852	3,064319	2,051321
7	26,591198	0,738644	0,00512947	0,000035621	7	1,3827160	138,27160	3,575039	2,393208
8	30,389940	0,844165	0,00586226	0,000040710	8	1,5802469	158,02469	4,085759	2,735095.
9	34,188683	0,949686	0,00659504	0,000045799	9	1,7777777	177,77777	4,596478	3,076981

Nos	Mètres carrés en toises carrées.	Mètres carrés en pieds carrés.	Mètres carrés en pouces carr.	Mètres carrés en lignes carr.	Nos	Myriamètres carrés en lieues carr.	Myriares en lieues carr.	Hect. en arp. Eaux et F. ou ar. en per. ca.	Hect. en arp. de Pa., ou ares en perc. carr.
1	0,263245	9,47682	1364,66	196511	1	5,0625	0,050625	1,958021	2,924945
2	0,526490	18,95364	2729,32	393023	2	10,1250	0,101250	3,916041	5,849889
3	0,789735	28,43046	4093,99	589534	3	15,1875	0,151875	5,874062	8,774834
4	1,052980	37,90728	5458,65	786045	4	20,2500	0,202500	7,832083	11,699778
5	1,316225	47,38410	6823,31	982557	5	25,3125	0,253125	9,790104	14,624723
6	1,579470	56,86092	8187,97	1179068	6	30,3750	0,303750	11,748124	17,549667
7	1,842715	66,33774	9552,63	1375579	7	35,4375	0,354375	13,706145	20,474612
8	2,105960	75,81456	10917,30	1572091	8	40,5000	0,405000	15,664166	23,399556
9	2,369205	85,29138	12281,96	1768602	9	45,5625	0,455625	17,622186	26,324501

Digitized by Google

Table pour convertir les mesures cubiques anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement.

Nos	Toises cubes en mètres cubes.	Pieds cubes en mètres cubes.	Pouces cubes en mètres cubes.	Lignes cubes en mètres cubes.	Nos	Cordes de bois, Eaux et Forêts, en stères.	Solive (charpente) en stères ou mètres cubes.
1	7,40389	0,0342773	0,000019836	0,00000001148	1	3,8391	0,10283
2	14,80777	0,0685545	0,000039673	0,00000002296	2	7,6781	0,20566
3	22,21166	0,1028318	0,000059509	0,00000003444	3	11,5172	0,30850
4	29,61555	0,1371090	0,000079345	0,00000004592	4	15,3562	0,41133
5	37,01944	0,1713863	0,000099182	0,00000005740	5	19,1953	0,51416
6	44,42332	0,2056635	0,000119018	0,00000006888	6	23,0343	0,61699
7	51,82721	0,2399408	0,000138855	0,00000008036	7	26,8734	0,71982
8	59,23110	0,2742180	0,000158691	0,00000009184	8	30,7124	0,82265
9	66,63498	0,3084953	0,000178527	0,00000010331	9	34,5515	0,92549

Nos	Mètres cubes en toises cubes.	Mètres cubes en pieds cubes.	Mètres cubes en pouces cubes.	Mètres cubes en lignes cubes.	Nos	Stères en cordes de bois, Eaux et Forêts.	Mètres cubes en solives.
1	0,135064	29,1739	50412,44	87112693	1	0,26048	9,7246
2	0,270128	58,3477	100824,88	174225385	2	0,52096	19,4492
3	0,405193	87,5216	151237,31	261338078	3	0,78144	29,1739
4	0,540257	116,6955	201649,75	348450770	4	1,04192	38,8985
5	0,675321	145,8693	252062,19	435563463	5	1,30240	48,6231
6	0,810385	175,0432	302474,63	522676155	6	1,56289	58,3477
7	0,945449	204,2170	352887,06	609788848	7	1,82337	68,0723
8	1,080513	233,3909	403299,50	696901541	8	2,08385	77,7970
9	1,215578	262,5648	453711,94	784014233	9	2,34433	87,5216

Digitized by Google

Table pour convertir les mesures de capacité anciennes en mesures nouvelles, et réciproquement.

No.	Pintes de Paris en litres.	Mui. de vin de Paris en hectolit.	Setiers de blé de Par. en hectolit.	Boisseaux en litres.	Litrons en litres.
1	0,9313	2,6822	1,5610	13,008	0,8130
2	1,8626	5,3644	3,1220	26,017	1,6260
3	2,7940	8,0466	4,6830	39,025	2,4391
4	3,7253	10,7288	6,2440	52,033	3,2521
5	4,6566	13,4110	7,8050	65,041	4,0651
6	5,5879	16,0932	9,3660	78,050	4,8781
7	6,5192	18,7754	10,9270	91,058	5,6911
8	7,4505	21,4576	12,4880	104,066	6,5041
9	8,3819	24,1398	14,0490	117,075	7,3172

Nos	Litres en pintes de Paris.	Hectoli. en mui. de vin de Paris.	Hectoli. en set. de blé de Paris.	Litres en boisseaux.	Litres en litrons.
1	1,0737	0,3728	0,6406	0,07687	1,2300
2	2,1475	0,7457	1,2812	0,15375	2,4600
3	3,2212	1,1185	1,9218	0,23062	3,6900
4	4,2950	1,4913	2,5625	0,30750	4,9199
5	5,3687	1,8641	3,2031	0,38437	6,1499
6	6,4425	2,2370	3,8437	0,46124	7,3799
7	7,5162	2,6098	4,4843	0,53812	8,6099
8	8,5900	2,9826	5,1249	0,61499	9,8399
9	9,6637	3,3555	5,7655	0,69187	11,0699

Le setier d'avoine vaut 2 setiers de blé, le setier de sel vaut 208 litr., et le setier de charbon vaut 2 setiers de sel.

Table pour convertir les poids anciens en poids nouveaux, et réciproquement.

Nos	Livres en kilogram.	Onces en grammes.	Gros en grammes.	Grains en grammes.	Quintaux en myriagra.
1	0,48951	30,59	3,824	0,053	4,8951
2	0,97901	61,19	7,649	0,106	9,7901
3	1,46852	91,78	11,473	0,159	14,6852
4	1,95802	122,38	15,297	0,212	19,5802
5	2,44753	152,97	19,121	0,266	24,4753
6	2,93704	183,56	22,946	0,319	29,3704
7	3,42654	214,16	26,770	0,372	34,2654
8	3,91605	244,75	30,594	0,425	39,1605
9	4,40555	275,35	34.418	0,478	44,0555

Nos	Kilogram. en livres.	Grammes en onces.	Grammes en gros.	Grammes en grains.	Myriagra. en quintaux.
1	2,04288	0,033	0,261	18,827	0,20429
2	4,08575	0,065	0,523	37,654	0,40858
3	6,12863	0,098	0,784	56,481	0,61286
4	8,17151	0,131	1,046	75,309	0,81715
5	10,21438	0,163	1,307	94,136	1,02144
	12,25726	0,196	1,569	112,963	1,22573
7	14,30014	0,229	1,830	131,790	1,43001
8	16,34301	0,261	2,092	150,617	1,63430
9	18,38589	0,294	2,353	169,444	1,83859

Digitized by Google

Table pour convertir les mesures linéaires usuelles en mesures nouvelles, et réciproquement.

Nos	Toises en mètres.	Pieds en mètres.	Pouces en mètres.	Lignes en mètres.	Aunes en mètres (*).
1	2	0,333	0,028	0,002	1,2
2	4	0,667	0,056	0,005	2,4
3	6	1,000	0,083	0,007	3,6
4	8	1,333	0,111	0,009	4,8
5	10	1,667	0,139	0,012	6,0
6	12	2,000	0,167	0,014	7,2
7	14	2,333	0,194	0,016	8,4
8	16	2,667	0,222	0,019	9,6
9	18	3,000	0,250	0,021	10,8

Nos	Mètres en toises.	Mètres en pieds.	Mètres en pouces.	Mètres en lignes.	Mètres en aunes (*).
1	0,500	3	36	432	0,833
2	1,000	6	72	864	1,667
3	1,500	9	108	1296	2,500
4	2,000	12	144	1728	3,333
5	2,500	15	180	2160	4,167
6	3,000	18	216	2592	5,000
7	3,500	21	252	3024	5,833
8	4,000	24	288	3456	6,667
9	4,500	27	324	3888	7,500

(*) Remarque. Cinq aunes usuelles valant 6 mètres, pour convertir des aunes usuelles en mètres, il suffit d'augmenter le nombre des aunes de leur cinquième partie; et pour convertir des mètres en aunes usuelles, il suffit de diminuer le nombre des mètres de leur sixième partie.

Table pour convertir les mesures de capacité usuelles en mesures nouvelles, et réciproquement.

Nos	Boisseaux de blé en litres (*).
1	12,5
2	25
3	37,5
4	50
5	62,5
6	75
7	87,5
8	100
9	112,5

Nos	Litres en boisseaux de blé.
1	0,08
2	0,16
3	0,24
4	0,32
5	0,40
6	0,48
7	0,56
8	0,64
9	0,72

(*) On n'a pas adopté des mesures usuelles pour les liquides.

Table pour convertir des poids usuels en poids nouveaux.

Livres en kilogrammes.	Onces en grammes.
0,5	31,25
1,0	62,50
1,5	93,75
2,0	125,00
2,5	156,25
3,0	187,50
3,5	218,75
4,0	250,00
4,5	281,25

Gros en grammes.	Grains en grammes.
3,906	0,054
7,812	0,109
11,719	0,163
15,625	0,217
19,531	0,271
23,438	0,326
27,344	0,380
31,250	0,434
35,156	0,488

Réciproquement, un kilogramme vaut 2 livres, ou 32 onces, ou 256 gros, ou 18 432 grains.

Digitized by Google

TABLE DE COMPARAISON

DE QUELQUES ANCIENNES MESURES DES PRINCIPALES VILLES DE FRANCE,

AVEC LES MESURES NOUVELLES.

ABBEVILLE.... L'*aune* vaut $1^{mètre},18$, le *setier* 13 décalitres, la *livre-poids* de marc 400 grammes.

AMIENS..... Le *setier* vaut $3^{décalitres},32$, la *livre* 460 grammes.

ARLES..... Le *setier* vaut 1 hectolitre, la *charge* $0^{hectolit.},85$.

ARRAS..... L'*aune* vaut $0^{m},72$.

AUXERRE..... Le *muid* vaut $0^{hectolitre},21$.

AVIGNON..... La *canne* vaut $281^{litres},79$, le *boisseau* 91 litres, la *livre-poids* 410 grammes.

BAYONNE.... L'*aune* vaut $1^{m},06$, la *velte* $9^{litres},36$, le *tonneau* 928 litres, la *livre-poids* 490 grammes.

BEAUCAIRE.... Le *setier* vaut $4^{décalitres},29$.

BEAUNE..... Le *quartaut* vaut $113^{l},29$, la *demi-queue* $228^{l},48$.

BESANÇON. ... Le *boisseau* vaut $2^{décalit.},34$.

BORDEAUX.... L'*aune* vaut $1^{m},19$, la *petite barrique* $175^{litres},01$, la *grande barrique* $205^{lit.},46$, le *tonneau* $821^{lit.},84$, le *boisseau* $7^{décal.},86$, la *livre-poids* 490 gram.

COGNAC..... Le *baril* d'eau-de-vie vaut $210^{litres},25$.

DIEPPE..... Le *boisseau* vaut 26 litres, la *mine* $10^{décalitres},4$.

DIJON..... L'*aune* vaut $1^{m},18$, la *pinte* $1^{litre},61$, le *tonneau* $288^{litres},57$, l'*hémine* $0^{hectolitre},48$.

DOUAI..... L'*aune* vaut $0^{mèt.},84$, le *pot* pour le vin $2^{lit.},66$, la *livre-poids* 430 grammes.

LE HAVRE.. .. Le *boisseau* vaut $2^{décalitres},86$.

LILLE..... L'*aune* vaut $0^{mètre},70$, le *pot* $0^{litre},29$, la *rasière* $7^{decalitres},27$, la *livre-poids* 460 grammes.

LIMOGES..... L'*aune* vaut $1^{mèt.},19$, la *pinte* $1^{litre},07$, le *setier* 51 litres, la *livre-poids* 490 grammes.

Digitized by Google

LYON. . . . . Le *pied* vaut $0^{m},34$, l'*aune* $1^{m},19$, le *pot* $0^{lit.},95$, le *bichet* $3^{décal.},51$, la *livre-poids* de marc 490 grammes, la *livre* pour la soie 460 grammes.

MACON. . . . . La *demi-queue* vaut $214^{litr.},99$, l'*ânée* 26 décalit.

MARSEILLE . . . . La *palme* vaut $0^{m},25$, la *canne* pour la soie $1^{m},99$, la *canne* pour les draps $2^{m},11$, l'*aune* pour les toiles $1^{m},16$, le *pot* $1^{lit.},01$, la *millerolle* $60^{lit.},5$, la *livre-poids* 400 grammes.

MEAUX et MELUN. Le *setier* vaut 13 décalitres.

METZ. . . . . La *verge mespisine* vaut $2^{m},98$, l'*aune* $1^{m},19$, la *pinte* $0^{lit.},95$, la *hotte* $41^{lit.},9$, le *bichet* 16 litr.

MONTPELLIER. . . Le *pan* vaut $0^{m},25$, la *canne* $1^{m},99$, le *pot* $1^{lit.},44$, le *tonneau* $413^{lit},87$, le *setier* pour le vin $45^{lit.},99$, le *setier* pour le grain $5^{décal.},23$, la *livre* 400 gram.

NANCY. . . . . L'*aune* vaut $0^{m},63$, la *livre* 460 grammes.

NANTES . . . . . La *petite aune* vaut $0^{m},63$, la *grande aune* $1^{m},39$, le *pot* pour le vin $1^{lit.},66$, la *barrique* 200 litr., la *pipe* 400 litres, le *tonneau* 800 litr., le *setier* $1^{hectol.},39$, la *livre-poids* de marc 490 grammes.

ORLÉANS. . . . . L'*aune* vaut $1^{m},19$, la *pinte* $1^{litre},13$, la *velte* $7^{litres},54$, le *muid* $289^{lit.},41$, le *tonneau* $548^{lit.},35$, le *boisseau* 8 lit., le *muid* $4^{hectol.},03$.

REIMS . . . . . Le *quartaut* vaut $98^{litres},94$.

RENNES. . . . . L'*aune* vaut $1^{m},39$, la *mine* $2^{hectolitres},43$.

ROUEN . . . . . L'*aune* vaut $1^{m},19$, l'*aune* pour les laines et les soies $1^{m},16$, l'*aune* pour les toiles $1^{m},40$, le *boisseau* $2^{décalitres},28$, la *mine* $9^{décalit.},14$, le *setier* $18^{décalit.},27$, le *muid* $219^{décalit.},26$, la *barrique* $212^{litres},49$.

SEDAN. . . . . Le *quartel* vaut $2^{décalitres},47$.

STRASBOURG. . . L'*aune* vaut $0^{m},52$, le *pied* $0^{m},29$, le *pot* $1^{litre},89$, la *livre* (de 16 onces) 470 grammes.

TOULON. . . . . La *canne* vaut $1^{m},93$, l'*escandeau* $14^{litres},14$, la *millerolle* $64^{litres},77$, l'*hémine* $10^{décalitres},47$.

TOULOUSE. . . . . Le *pan* vaut $0^{m},23$, la *canne* $1^{m},78$, le *péga* $3^{litres},17$, le *pugnère* 210 litres.

Digitized by Google

MESURES DES ROMAINS.

MESURES DE LONGUEUR.	mètres.
Le pied romain	0,296
Le pas commun, de 2 pieds et demi romains	0,741
L'exapode, de 6 desdits pieds	1,776
Le mille ou milliaire romain	1481,148

MESURES DE SUPERFICIE.	m. carr.
L'exapode carré	3,160
Le jugère ou journal de terre, de 800 exapodes.	2528,395
Le versus, de 1000 pieds carrés	831,984
L'hérédie, composée de 2 jugères	5056,790
La centurie, composée de 100 hérédies	505679,000
Le saltus, de 4 centuries	2022716,000

MESURES DE CAPACITÉ.	litres.
L'amphore, ou pied cube romain, ou métretès.	26,012
Le culeus, de 20 amphores	520,246
L'urne, moitié de l'amphore	13,006
Le modius ou boisseau, tiers de l'amphore	8,671
Le demensum, de 4 modius	34,683
Le conge, 8e de l'amphore	3,252
Le cyathe, 72e du conge	0,045
La conque, moitié du cyathe	0,023
La cuillerée vétérinaire, 10e du cyathe	0,005

MESURES DE POIDS.	gr
Le poids du métretès romain, rempli d'eau pure.	25986,297
Le poids de leur conge	3248,287
Leur livre commune, de 12 onces	324,829
La mine de leur livre commune	338,363
Leur livre médicale, de 16 onces	433,105
La mine de leur livre médicale	451,151
Leur once, de 8 drachmes	27,069
Leur drachme, de 3 scrupules	3,384
Leur scrupule, de 24 grains	1,128
Leur grain	0,047

Digitized by Google

Monnaies des Romains.

	fr. c.
Le denier ou 10 as	0,47
Le quinaire ou 5 as	0,23
Le sesterce ou 2 as et demi	0,12

MESURES DES ANCIENS GRECS.

MESURES DE LONGUEUR.

	mètres.
Le pied olympique	0,309
La coudée, de 18 pouces olympiques	0,463
L'exapode, de 6 pieds ou de 4 coudées	1,851
L'hécatonpède olympique, de 100 pieds	30,864
Le stade olympique	30,864
Le stade nautique	166,667
L'ancien stade d'Europe	173,611

MESURES DE SUPERFICIE.

	m. car.
L'exapode carré, composé de 36 pieds olympiques carrés	3,429
Le plèthre, contenant 100 pieds olympiques carrés	9,526
Le jugère, contenant 288 plèthres ou 800 exapodes	2743,449

MESURES DE CAPACITÉ.

	litres.
Le métretès ou pied cube olympique, appelé aussi cados ou diota	29,401
L'amphoréus, moitié du métretès	14,701
Le chous ou conge grec, 12e du métretès grec	2,450
La chénice urbaine ou tiers du conge	0,817
Le xestès, 6e du conge grec	0,408
Le cotyte ou demi-xestès	0,204
Le tétarte ou quart du xestès	0,102
L'oxybate ou vinaigrier, 8e du xestès	0,051
Le cyathe, 12e du xestès	0,034

Digitized by Google

	litres.
La conque, moitié du cyathe	0,017
Le mystron, moitié de la conque	0,009
La chesme, 5e du cyathe	0,007
La cuillerée, moitié de la chesme ou 10e du cyathe.	0,003

MESURES DE POIDS.

	gr
Le métretès, rempli d'eau pure à la température moyenne	29370,348
Le talent commun	20909,164
La livre médicale, de 16 onces	446,062
La mine commune, de 12 onces et demie	348,486
La livre commune, de 12 onces	334,547
L'once, de 8 drachmes	27,879
La drachme commune ou phénicienne de 3 scrupules	3,485
Le scrupule, de 24 grains	1,162
Le grain, le même que le grain asiatique	0,048

Monnaies d'Athènes.

	fr. c.
Le talent ou 6000 drachmes	5333,33
La mine ou 100 drachmes	88,89
La tétra-drachme ou 4 drachmes	3,55
La drachme ou 6 oboles	0,89
L'obole	0,15

Comparaison de quelques Mesures étrangères avec les nouvelles Mesures françaises.

MESURES LINÉAIRES.

	mm
Ancien pied français	324,7
Pied anglais	304,8
Vare de Castille	836,6
Pied du Rhin	313,9
De Vienne	316,0
D'Amsterdam	283,0
De Suède	297,1
De Russie	354,1
De la Chine	320,0

POIDS.

	gr
Liv. poids de marc	489,2
Angl. { livre troy	372,6
Angl. { avoir-du-pois	453,1
Castille	459,4
Cologne	467,4
Vienne	558,6
Amsterdam	491,4
Suède	424,6
Russie	409,5

Digitized by Google

Table de concordance des calendriers républicain et grégorien.

	AN II. 1793—1794.	AN III. 1794—1795.	AN IV. 1795—1796	AN V. 1796—1797.	AN VI. 1797—1798.	AN VII. 1798—1799.	AN VIII. 1799—1800.
1 vendém...	22 sept. 1793.	22 sept. 1794.	23 sept. 1795.	22 sept. 1796.	22 sept. 1797.	22 sept. 1798.	23 sept. 1799.
1 brumaire..	22 octobre...	22 octobre...	23 octobre...	22 octobre...	22 octobre..	22 octobre...	23 octobre...
1 frimaire...	21 novembre..	21 novembre..	22 novemb..	21 novemb..	21 novembr.	21 novembr.	22 novembr.
1 nivôse....	21 décembre..	21 décembre..	22 décembr..	21 décembr.	21 décembr..	21 décembr..	22 décembr..
1 pluviôse..	20 janvier....	20 janvier....	21 janvier..	20 janvier...	20 janvier...	20 janvier...	21 janvier..
1 ventôse...	19 février....	19 février....	20 février...	19 février...	19 février...	19 février...	20 février...
1 germinal..	21 mars.....	21 mars.....	21 mars....	21 mars....	21 mars....	21 mars.....	22 mars....
1 floréal....	20 avril.....	20 avril.....	20 avril.....	20 avril.....	20 avril.....	20 avril.....	21 avril....
1 prairial...	20 mai.....	20 mai.....	20 mai.....	20 mai.....	20 mai.....	20 mai.....	21 mai.....
1 messidor..	19 juin.....	19 juin.....	19 juin.....	19 juin.....	19 juin.....	19 juin.....	20 juin.....
1 thermidor.	19 juillet....	19 juillet.....	19 juillet...	19 juillet....	19 juillet...	19 juillet...	20 juillet...
1 fructidor..	18 août.....	18 août.....	18 août.....	18 août.....	18 août.....	18 août.....	19 août.....
15 *idem*.....	1 septembre.	1 septembre.	1 septembr.	1 septembr.	31 août.....	1 septembr.	2 septembr
5e jour comp..	21 septembre.	21 septembre.	21 septembr.	20 septembr.	20 septembr.	21 septembr.	22 septembr.
6e *idem*.....	22 septembre.	22 septembre.	22 septembr.	21 septembr.	21 septembr.	22 septembr.	23 septembr.

	AN IX. 1800—1801.	AN X. 1801—1802.	AN XI. 1802—1803.	AN XII. 1803—1804.	AN XIII. 1804—1805.	AN XIV. 1805.
1 vendém...	23 sept. 1800.	23 sept. 1801.	23 sept. 1802.	24 sept. 1803.	23 sept. 1804	23 sept. 1805.
1 brumaire..	23 octobre...	23 octobre...	23 octobre..	24 octobre..	23 octobre...	23 octobre...
1 frimaire..	22 novembre.	22 novembre.	22 novembr.	23 novembr.	22 novembr.	22 novembr.
1 nivôse....	22 décembre..	22 décembre..	22 décembr..	23 décembr..	22 décembr..	22 décembr..
1 pluviôse..	21 janvier...	21 janvier...	21 janvier...	22 janvier...	21 janvier...	
1 ventôse....	20 février....	20 février....	20 février...	21 février...	20 février...	
1 germinal..	22 mars.....	22 mars.....	22 mars.....	22 mars....	22 mars....	
1 floréal....	21 avril.....	21 avril.....	21 avril.....	21 avril.....	21 avril.....	
1 prairial...	21 mai.....	21 mai.....	21 mai.....	21 mai.....	21 mai.....	
1 messidor...	20 juin.....	20 juin.....	20 juin.....	20 juin.....	20 juin.....	
1 thermidor.	20 juillet....	20 juillet....	20 juillet....	20 juillet...	20 juillet....	
1 fructidor..	19 août.....	19 août.....	19 août.....	19 août.....	19 août.....	
15 fructidor...	2 septembre.	2 septembre.	2 septembr.	2 septembr.	2 septembr.	
5e jour comp.	22 septembre.	22 septembre.	22 septembr.	22 septembr.	22 septembr.	
6e *idem*.....	23 septembre.	23 septembre.	23 septembr.	23 septembr.	23 septembr	

Digitized by Google

Table pour convertir les livres (tournois), sous et deniers, en francs; ainsi que les francs en livres.

Nos	LIVRES en FRANCS.	SOUS en FRANCS.	DENIERS en FRANCS.	FRANCS en LIVRES.
1	0,987 650 943	0,049 382 547	0,004 115 212	1,012 503 463
2	1,975 301 885	0,098 765 094	0,008 230 425	2,025 006 927
3	2,962 952 828	0,148 147 641	0,012 345 637	3,037 510 390
4	3,950 603 771	0,197 530 189	0,016 460 849	4,050 013 853
5	4,938 254 713	0,246 912 736	0,020 576 061	5,062 517 317
6	5,925 905 656	0,296 295 283	0,024 691 274	6,075 020 780
7	6,913 556 598	0,345 677 830	0,028 806 486	7,08 524 244
8	7,901 207 541	0,395 060 377	0,032 921 698	8,100 027 707
9	8,888 858 484	0,444 442 924	0,037 036 910	9,112 531 170

TABLEAU DE COMPARAISON

des Monnaies étrangères avec les Monnaies françaises, toutes supposées droites (exactes) de poids et de titre, d'après les lois de fabrication.

L'usage de ce tableau n'a pas besoin d'être expliqué; mais pour en comprendre la construction, il faut savoir que le *titre* d'une pièce de monnaie est la quantité de métal pur, ou de *fin*, contenu dans la totalité de la pièce, qu'on suppose composée de 1000 parties. Le titre du franc est $\frac{9}{10}$ ou 900; son poids étant de 5 grammes (100), il contient $\frac{9}{2}$ grammes d'argent: ainsi, abstrac-

Digitized by Google

tion faite des frais de monnayage, le gramme d'argent vaut $\frac{2}{9}$ de franc, et le kilogramme $\frac{2000}{9}$ de franc ou 222f 22c; le kilogramme d'or vaut 3444f 44c, le rapport de la valeur de l'or à celle de l'argent étant établi de $15\frac{1}{2}$ à 1.

En multiplant le poids d'une pièce par son titre, on obtient le poids de la quantité de fin qu'elle renferme, ce qui constitue sa valeur; car on ne tient aucun compte de l'alliage : ainsi la guinée pesant 8gr,3802, au titre de 917, c'est-à-dire 0,917, contient 7gr,6846 d'or pur; mais le kilogramme d'or rapporté au franc vaut 3444f 44c, ce qui donne 3f,44444 pour le gramme, et, par conséquent, 26f 47c pour la guinée, ainsi qu'on le trouve dans le tableau : c'est sa valeur au *pair*.

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	ANGLETERRE.			
Or.	Guinée de 21 shillings	8g380	917	26f 47c
	Demi	4,190	917	13 23,50
	Un quart	2,095	917	6 61,75
	Un tiers, ou 7 shillings	2,793	917	8 82,33
	Souverain depuis 1818, de 20 shillings	7,981	917	25 21
Arg.	Crown, ou couronne de 5 shill. anciens	30,074	925	6 16
	Shilling ancien	6,015	925	1 24
	Crown, ou couronne, depuis 1818	28,251	925	5 81
	Shilling, depuis 1818	5,650	925	1 16
	AUTRICHE ET BOHÊME.			
Or.	Ducat de l'Empereur	3,490	986	11 85
	Ducat de Hongrie	3,491	984	11 91
	Souverain	5,567	917	17 58
	Demi	2,783	917	8 79
Arg.	Ecu, ou risdale de convention, depuis 1753	28,064	833	5 19
	Demi-risdale, ou florin	14,032	833	2 60
	Vingt kreutzers	6,639	581	0 86
	Dix kreutzers	3,898	500	0 43
	BADE.			
Or.	Pièce de 10 florins, depuis 1819	6,878	902	21 04
	—— de 5 florins	3,439	902	10 52
Arg.	Pièce de 3 florins, nouveaux	32,795	871	6 35
	—— de 2 florins	25,450	750	4 18
	—— de 1 florin	12,725	750	2 09

Digitized by Google

Métal	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	BAVIÈRE.			
Or.	Ducat de Bavière de 1764 à 1800	3g490	986	11f85c
	Carolin	9,744	771	25 66
	Maximilien	6,496	771	17 18
Arg.	Couronne	29,540	872	5 72
	Risdale de 1800	28,064	833	5 19
	Teston ou kopfstuck	6,643	583	0 86
	BELGIQUE.			
Or.	20 francs	6,451	900	20 00
	40 francs	12,903	900	40 00
Arg.	$\frac{1}{4}$ de franc	1,25	900	0 25
	$\frac{1}{2}$ de franc	2,50	900	0 50
	1 franc	5,00	900	1 00
	2 francs	10,00	900	2 00
	5 francs	15,00	900	5 00
	DANEMARK ET HOLSTEIN.			
Or.	Ducat courant depuis 1767	3,143	875	9 47
	Ducat spécies, 1791 à 1802	3,519	979	11 86
	Chrétien, 1773	6,735	903	20 95
Arg.	Risdale d'espèce, ou double écu de 96 schellings danois, de 1776	29,126	875	5 66
	Risdale, ou pièce de 6 m. danois de 1750	16,800	833	4 56
	Mark danois de 16 schellings, de 1776	» »	688	» »
	ESPAGNE.			
Or.	Pistole ou doublon de 8 écus, 1772 à 1786	27,045	901	83 93
	—— de 4 écus	13,5225	901	41 96,50
	—— de 2 écus	6,7613	901	20 98,25
	Demi-pistole, ou écu	3,3806	901	10 49,12
	Pistole ou doublon de 8 écus, depuis 1786	27,045	875	81 51
	—— de 4 écus	13,5225	875	40 75,50
	—— de 2 écus	6,7613	875	20 37,75
	Demi-pistole ou écu	3,3806	875	10 18,87
Arg.	Piastre, depuis 1772	27,045	903	5 43
	Réal de 2, ou piécette, ou cinquième de piastre.	5,971	813	1 08
	Réal de 1, ou demi-piécette, ou 10e de piastre	2,9855	813	0 54
	Réallillo, ou réal de veillon, ou 20e de piastre.	1,4928	813	0 27
	Nota. Ces trois dernières pièces sont dénommées *monnaie provinciale;* elles sont fabriquées en Espagne et n'ont cours que dans la péninsule.			
	ÉTAT ECCLÉSIASTIQUE.			
Or.	Pistoles de Pie VI et Pie VII	5,471	917	17 27,50
	Demi	2,7355	916$\frac{2}{3}$	8 63,75
	Sequin, 1769, Clément XIV et ses successeurs.	3,426	1000	11 80
	Demi	1,713	1000	5 90
Arg.	Ecu de 10 pauls, ou 100 bayoques	26,437	917	5 41
	Trois dixièmes d'écu, ou teston de 30 bayoques.	7,932	916	1 62
	Un cinquième d'écu, ou papeto de 20 bayoq.	5,287	916	1 08
	Un dixième d'écu, ou paul de 10 bayoques	2,644	916	0 54

Digitized by Google

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE.			
Or.	Double aigle de 10 dollars	17,480	917	55f 21c
	Aigle de 5 dollars	8,740	917	27 60,50
	Demi-aigle, ou 2 ½ dollars	4,370	917	13 80,25
Arg.	Dollar	27,000	903	5 42
	Demi	13,500	903	2 71
	Un quart	6,750	903	1 35,50
	HAMBOURG.			
Or.	Ducat *ad legem imperii*	3,490	986	11 85
	Ducat nouveau de la ville	3,488	979	11 76
	Marc banco (*monnaie imaginaire*)	» »	» »	1 88
Arg.	Marc ou 16 schell., d'après la convent. de Lubeck	9,164	750	1 53
	Risdale de constitution, ou écu d'espèce	29,233	889	5 78
	HOLLANDE.			
Or.	Ducat de Hollande	3,482	982	11 78
	—— de Guillaume	3,490	986	11 85
	10 florins	6,729	900	20 8599
	5 florins	3,364	900	10 4299
Arg.	1/10 florin ou 5 cents	0,846	569	0 11
	1/10 florin ou 10 cents	1,692	569	0 21
	1/4 florin ou 25 cents	4,230	569	0 53
	1/2 florin ou 50 cents	5,383	893	1 07
	1 florin ou 100 cents	10,766	893	2 14
	3 florins	32,298	893	6 42
	JAPON.			
	(*Par approximation, et faute de renseignem. précis sur le poids et le titre légal des monn.*)			
Or	Kobang vieux de 100 mas	» »	»	51 24
	Demi-kobang de 50 mas	» »	»	25 62
	—— nouveau de 100 mas	» »	»	39 69
	Demi —— de 50 mas	» »	»	18 34
	Tigo-gin, ou pièce de 40 mas	» »	»	14 40
	Demi de 20 mas	» »	»	7 20
Arg.	Un quart de 10 mas	» »	»	3 60
	Un huitième de 5 mas	» »	»	1 80
	LOMBARDO-VÉNITIEN (Royaume)			
Or.	Souverain depuis 1823	11,332	900	35 13
	Demi ou 20 liv. d'Autriche	5,666	900	17 56
Arg.	Ecu de 6 liv. d'Autriche	25,986	900	5 20
	Demi-Ecu ou 1 florin	12,993	900	2 60
	Livre d'Autriche	4,331	900	0 86
	MOGOL (par approximation).			
Or.	Roupie aux signes du Zodiaque	10,889	1000	37 51
	Demie	» »	»	18 75
	Un quart	» »	»	9 37
	Pagode au croissant	» »	»	9 46
	—— à l'étoile	» »	»	9 35
	Ducat de la Compagnie hollandaise	» »	»	11 62
	Demi	» »	»	5 81

Digitized by Google

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Titre légal.	Valeurs.
	MOGOL. (Suite.)			
Arg.	Roupie du Mogol	» »	»	2f 42c
	—— de Madras	» »	»	2 40
	—— d'Arcate	» »	»	2 36
	—— de Pondichéry	» »	»	2 42
	Double fanon des Indes	» »	»	0 63
	Fanon	» »	»	0 31
	Pièce de la Compagnie hollandaise	» »	»	2 40
	NAPLES.			
Or.	6 ducats ou doppia de 60 carlins (don Carlos)	6g,799	894	26 59
	—— de Ferdinand IV	6,452	845	25 61
	Pièce de 20 francs (Murat)	» »	900	20 »
	Once nouveau de 3 ducats, depuis 1818	3,787	996	12 99
	Quintuple de 15 ducats, depuis 1818	18,933	996	64 95
	Décuple de 30 ducats, depuis 1818	37,867	996	129 91
Arg.	12 carlins de 120 grains, depuis 1804	27,533	833	5 10
	Ducats de 10 carlins de 100 grains, 1784	22,749	838	4 24
	2 carlins, depuis 1804	4,589	833	0 85
	1 carlin, depuis 1804	2,2945	833	0 42,5
	Ducat de 10 carlins, de 1818	22,943	833	4 24
	PARME.			
Or.	Sequin	3,468	1000	11 95
	Pistole de 1784	7,498	891	23 01
	Pistole de 1786 à 1791	7,141	891	21 91,50
	40 lire de Marie-Louise, depuis 1815	12,903	900	40 »
	20 lire de Marie-Louise, depuis 1815	6,451	900	20 »
Arg.	Ducat de 1784 et 1796	25,707	906	5 18
	Pièce de 3 livres, depuis 1790	3,672	833	0 68
	—— d'une livre 10 sous, depuis 1790	1,836	833	0 34
	5 lire de Marie-Louise, depuis 1815	25,000	900	5 »
	2 lire, 1 lira, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ de lira, à proportion	» »	»	» »
	PERSE (par approximation).			
Or.	Roupie	» »	»	36 75
	Demie	» »	»	18 37,50
	Double roupie de 5 abassis	» »	»	4 90
Arg.	Roupie de 2 $\frac{1}{2}$ abassis	» »	»	2 45
	Abassi	» »	»	0 97
	Mamoudi	» »	»	0 48,50
	Larin	» »	»	1 03
	PORTUGAL.			
Or.	Moeda douro, lisbonnine de 4800 reis	10,752	917	33 96
	Meia moeda, demi-lisbonnine 2400 reis	5,376	917	16 98
	Quartinho, quart de lisbonnine, de 1200 reis	2,688	917	8 49
	Meia dobra, portugaise de 6400 reis	14,334	917	45 23
	Demi-portugaise de 3200 reis	7,167	917	22 66
	Pièce de 16 testons de 1600 reis	3,583	917	11 03
	—— de 12 testons de 1200 reis	2,538	917	8 17
	—— de 8 testons de 800 reis	1,792	917	25 9

Digitized by Google

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	PORTUGAL. (Suite.)			
Arg.	Cruzade de 480 reis	1g,062	917	3f35c
	Cruzade neuve de 480 reis	14,633	903	2 94
	1000 reis	» »	»	6 12
	PRUSSE.			
Or.	Ducat fin	3,490	986	11 85
	Frédéric	6,682	903	20 78
	Demi	3,341	903	10 39
Arg.	Risdale ou thaler de 30 silbergros, de 1823	22,272	750	3 71
	Pièce de 5 silbergros	3,712	750	0 61
	Silbergros, valeur intrinsèque	2,192	208	0 11
	RAGUSE.			
Or.	*Néant.*			
Arg.	Talaro, dit ragusine	29,400	600	3 90
	Demi	14,700	600	1 95
	Ducat	13,666	450	1 37
	12 grossettes	4,140	450	0 41
	6 grossettes	2,070	450	0 20,50
	RUSSIE.			
Or.	Ducat de 1755 à 1763	3,495	979	11 78
	—— de 1763	3,473	969	11 59
	Impériale de 10 roubles, de 1755 à 1763	16,585	917	52 38
	Demie de 5 roubles, de 1755 à 1763	8,2925	917	26 19
	Impériale de 10 roubles, depuis 1763	13,072	917	41 29
	Demie de 5 roubles, depuis 1763	6,5365	917	20 64,50
Arg.	Rouble de 100 copecks, de 1750 à 1762	25,870	802	4 61
	——— depuis 1763 à 1807	24,011	750	4 0
	SARDAIGNE.			
Or.	Carlin, depuis 1768	16,056	892	49 33
	Demi	8,028	892	24 66
	Pistole	9,118	906	28 45
	Demie	4,559	906	14 22
Arg.	Ecu, depuis 1768	23,590	896	4 70
	Demi-écu	11,795	896	2 35
	Quart d'écu, ou une livre	5,8975	896	1 17
	Ecu neuf de 5 livres, 1816	25,000	900	5 0
	SAVOIE ET PIÉMONT.			
Or.	Sequin à l'annonciade	3,452	995	11 84
	Double neuve pistole de 24 livres	9,620	906	30 02
	Demie de 12 livres	4,810	906	15 0
	Carlin depuis 1755	48,100	906	150 10
	Demi	24,050	906	75 05
	Pistole neuve de 20 livres, de 1816	6,452	900	20 0
Arg.	Ecu de 6 livres, depuis 1755	35,169	906	7 08
	Demi-écu	17,584	906	3 54
	Un quart, ou 30 sous	8,792	906	1 77
	Demi-quart, ou 15 sous	4,3897	906	0 88
	Ecu neuf de 5 livres, 1816	25 »	900	5 0

Digitized by Google

Métal.	Dénomination des pièces.	Poids légal.	Tit. légal.	Valeurs.
	SAXE.			
Or.	Ducat	3g 490	986	11f 85c
	Double Auguste, ou 10 thalers	13,340	903	41 49
	Auguste, ou 5 thalers	6,670	903	20 75
	Demi-Auguste	3,335	903	10 37,5
Arg.	Risdale d'espèce, ou écu de convent., depuis 1763	28,064	833	5 19,50
	Demi, ou florin de convention	14,032	833	2 59,75
	Thaler de 24 bons gros (monnaie imaginaire.)	» »	»	3 90
	Un gros ou 32e de risdale, ou 24e de thaler	1,982	368	0 16,21
	SICILE.			
Or.	Once, depuis 1748	4,399	906	13 73
Arg.	Ecu de 12 tarins	27,533	833	5 10
	SUÈDE.			
Or.	Ducat	3,482	976	11 70
	Demi	1,741	976	5 85
	Quart	0,870	976	2 92,50
Arg.	Risdale d'espèce de 48 schell., de 1720 à 1802	29,508	878	5 75,73
	2 tiers de risdale, ou double plotte de 32 schell.	19,672	878	3 83,82
	Un tiers, ou 16 schellings	9,836	878	1 91,91
	SUISSE.			
Or.	Pièce de 32 franken de Suisse	15,297	904	47 63
	—— de 16	7,648	904	23 81,50
	Ducat de Zurich	3,491	979	11 77
	—— de Berne	3,452	979	11 64
	Pistole de Berne	7,648	902	23 76
Arg.	Ecu de Bâle de 30 batz, ou 2 florins	23,386	878	4 56
	Demi-écu, ou florin de 15 batz	11,693	878	2 28
	Franc de Berne, depuis 1803	7,512	900	1 50
	Ecu de Zurick, de 1781	25,057	844	4 70
	Demi, ou florin, depuis 1781	12,528	844	2 35
	Ecu de 40 batz de Bâle et Soleure, depuis 1798	29,480	901	5 90
	Pièce de 4 franken de Berne, de 1799	29,370	901	5 88
	—— de 4 franken de Suisse, en 1803	30,049	900	6 0
	—— de 2 franken de Suisse, en 1803	15,025	900	3 0
	—— d'un franken de Suisse, en 1803	7,512	900	1 50
	TOSCANE.			
Or.	Ruspone, ou 3 sequins aux lis	10,464	1000	36 04
	Un tiers ruspone, ou sequin aux lis	3,488	1000	12 01,33
	Demi-sequin	1,744	1000	6 00,67
	Sequin à l'effigie	3,488	1000	12 01,33
	Rosine	6,976	896	21 54
	Demie	3,488	896	10 77
Arg.	Francescone de 10 paoli, livournine, piastre à la rose, talaro, léopoldine et écu de 10 paoli	27,507	917	5 61
	Pièce de 5 paoli	13,753	917	2 80,50
	—— de 2 paoli	5,501	917	1 12,20
	—— de 1 paoli	2,751	917	0 56,10

FIN.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

SEP 2 8 1936

Digitized by Google

Digitized by Google